OEFENTOETS TOEGEPASTE STATISTIEK VOOR TA OVER HOOFDSTUKKEN 1 T/M 8

(1) Stel dat A en B gebeurtenissen zijn zodanig dat $P(A) = 0.9$ en $P(B) = 0.8$. Laat zien dat $P(A \cap B) \geq 0.7$.
Hint: gebruik de somregel.

(2) We selecteren willekeurig een natuurlijk getal uit de verzameling $\{1, 2, 3, ..., 100\}$, en we weten dat het getal deelbaar is door 2. Wat is de kans dat dit nummer ook deelbaar is door 3 of 5?
Hint: Definieer de gebeurtenissen
- A_2: het getal is deelbaar door 2;
- A_3: het getal is deelbaar door 3;
- A_5: het getal is deelbaar door 5.

(3) We gooien twee zuivere dobbelstenen. Definieer de gebeurtenis A door "de som van de worpen van de dobbelstenen is 7", B door "de som van de worpen van de dobbelstenen is 6" en C door "de uitkomst van de eerste dobbelsteen is 4". Laat zien dat A en C onafhankelijk zijn, terwijl B en C afhankelijk zijn.

(4) Stel dat X een stochastische variabele is met een $\text{Bin}(n, p)$ verdeling, $0 < p < 1$. Laat zien dat, voor k variërend tussen 0 en n, de kansmassafunctie $k \mapsto p_X(k)$ van X eerst stijgend is en dan dalend, met een maximum waar k gelijk is aan de grootste integer $k^* \leq (n+1)p$.

(5) Stel dat we de straal van een cirkel willekeurig tussen 0 en 2 kiezen. Bereken de verwachte waarde van de oppervlakte van de cirkel.

(6) Stel dat X een stochastische variabele is waarvan de verwachting gelijk is aan nul. Laat zien dat dan $\text{var}\,(3X + 2) = 9\text{E}\,[X^2]$.

(7) Stel dat X een stochastische variabele is met een exponentiële verdeling met parameter $\lambda = 2$.
   (a) Bereken de verdelingsfunctie van $Y = 1 - X$.
   (b) Stel dat $Z = \lceil Y \rceil$. Met andere woorden, Z wordt verkregen door Y af te ronden naar het dichtstbijzijnde gehele getal groter dan Y. Bereken $P(Z = 0)$.

SUCCES!

1. Oplossingen

(1) We know that $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. Naturally, $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$, hence

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1. \qquad \text{[Bonferroni inequality]}$$

Substituting the values of $P(A)$ and $P(B)$, we finally obtain

$$P(A \cap B) \geq 0.9 + 0.8 - 1 = 0.7.$$

(2) The probability we are interested in is

$$P(A_3 \cup A_5 | A_2) = \frac{P((A_3 \cup A_5) \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P((A_3 \cap A_2) \cup (A_5 \cap A_2))}{P(A_2)}$$
$$= \frac{P(A_3 \cap A_2) + P(A_5 \cap A_2) - P(A_3 \cap A_5 \cap A_2)}{P(A_2)}.$$

Now, we know that
- $A_3 \cap A_2$ is the event "number that can be divided by 3 and 2, that is by 6". The probability is 16/100.
- $A_5 \cap A_2$ is the event "number that can be divided by 5 and 2, that is by 10". The probability is 10/100.
- $A_3 \cap A_5 \cap A_2$ is the event "number that can be divided by 3, 5 and 2, that is by 30". The probability is 3/100.

Hence

$$P(A_3 \cup A_5 | A_2) = \frac{16/100 + 10/100 - 3/100}{50/100} = \frac{23}{50} = 0.46$$

(3) It is easy to verify that
- $A = \{(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)\}$;
- $B = \{(1,5); (2,4); (3,3); (4,2); (5,1)\}$;
- $C = \{(4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6)\}$;
- $A \cap C = \{(4,3)\}$;
- $B \cap C = \{(4,2)\}$.

Hence $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{5}{36}$ and $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
Thus $P(A \cap C) = \frac{1}{36} = P(A)P(C)$, but $P(B \cap C) = \frac{1}{36} \neq P(B)P(C)$.

(4) Just write

$$\frac{p_X(k)}{p_X(k-1)} = \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}.$$

Clearly, $p_X(k) \geq p_X(k-1)$ if and only if $(n-k+1)p \geq k(1-p)$, that is for $k = k^* \leq (n+1)p$.
It is then easy to verify that $p_X(k)$ grows until k reaches the largest integer k^* which is equal to or smaller than $(n+1)p$, and then decreases.

(5) Als de straal wordt gegeven door de stochast R, dan geldt

$$f_R(r) = \begin{cases} 1/2 & \text{als} \quad r \in [0,2] \\ 0 & \text{als} \quad r \notin [0,2] \end{cases}.$$

Dus met de change of variables formula zien we dat de gevraagde oppervlakte gelijk is aan

$$\mathrm{E}\left[\pi R^2\right] = \int_0^2 \frac{1}{2}\pi r^2 dr = \frac{\pi}{6}\left[r^3\right]_0^2 = \frac{4}{3}\pi.$$

(6) Er geldt $\mathrm{var}\,(3X+2) = 9\mathrm{var}\,(X)$. Het gevraagde volgt nu, aangezien $\mathrm{var}\,(X) = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}\left[X\right])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right]$.

(7) Aangezien X waarden ≥ 0 aanneemt, neemt Y waarden ≤ 1 aan. Dus $F_Y(y) = 1$ voor $y \geq 1$. Voor $y < 1$ geldt

$$P(Y \leq y) = P(1 - X \leq y) = P(-X \leq y - 1) = P(X \geq 1 - y) = e^{-2(1-y)}.$$

Merk eerste op dat $\{Z = 0\} = \{Y \in (-1, 0]\}$. Dus

$$P(Z = 0) = P(-1 < Y \leq 0) = F_Y(0) - F_Y(-1) = e^{-2} - e^{-4}.$$