Extra oefeningen Kanstat wi1275TA (H.2 – H.12)
Ter lering ende vermaeck
Antwoorden van 2 januari op Blackboard

---

1. [*Hoofdstuk 2*]
We beschouwen twee gebeurtenissen A en B. Gegeven is dat $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.7$ en $P(A \cap B) = 0.3$. Wat is $P(A^c \cap B^c)$?

a. 0.2 **b.** 0.3 **c.** 0.4 **d.** 0.5 **e.** 0.6 **f.** 0.7

2. [*Hoofdstuk 2*]
Een bak bevat twee rode, drie witte en vier blauwe ballen.
Als je willekeurig (en zonder terugleggen) twee ballen pakt, hoe groot is dan de kans dat de getrokken ballen verschillende kleuren hebben?

a. $\frac{46}{72}$ **b.** $\frac{50}{72}$ **c.** $\frac{58}{72}$ **d.** $\frac{38}{72}$ **e.** $\frac{52}{72}$ **f.** $\frac{42}{72}$

3. [*Hoofdstuk 2*]
Wat is de kans dat van drie gebeurtenissen A, B en C er zich precies twee voordoen?

a. $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) - \mathrm{P}(A \cup B \cup C)$;
b. $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) - 2\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$;
c. $\mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C)$;
d. $\mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C)$;
e. $\mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - 2\mathrm{P}(A \cap B \cap C)$;
f. $\mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - 3\mathrm{P}(A \cap B \cap C)$.

4. [*Hoofdstuk 2*]
Een experiment heeft kans p van slagen. Iemand herhaalt het experiment net zo lang totdat zij voor de tweede keer succes heeft. Wat is de kans dat het tweede succes wordt behaald met het zesde experiment?

a. $(1-p)^4p^2$ **b.** $6(1-p)^5p$ **c.** $(1-p)^5p$
d. $6p^2(1-p)^4$ **e.** $15p^2(1-p)^4$ **f.** $5p^2(1-p)^4$

5. [*Hoofdstuk 3*]
We beschouwen twee gebeurtenissen A en B. Gegeven is dat $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ en $P(A \cap B) = 0.2$. Wat is $P(A^c \cup B^c)$?

a. 0.3 **b.** 0.4 **c.** 0.5 **d.** 0.6 **e.** 0.7 **f.** 0.8

6. [*Hoofdstuk 3*]
Stel van de *onafhankelijke* gebeurtenissen A, B en C is gegeven $\mathrm{P}(A) = 0.2$, $\mathrm{P}(B) = 0.5$ en $\mathrm{P}(C) = 0.6$. Noem $\mathrm{P}(A^c \cap B \cap C)$ even p. Dan geldt:

a. $p = 0.9$ **b.** $p = 0.24$ **c.** $p = 0.06$
d. $p = 0.3$ **e.** $p = 0$ **f.** p is niet te berekenen.

7. [*Hoofdstuk 3*]
Welke van de volgende twee beweringen is/zijn (altijd) waar voor twee gebeurtenissen A en B (met kansen ongelijk aan 0 of 1)?
(I) Als $A \subset B$ dan zijn A en B afhankelijk.
(II) Als $A \cap B = \emptyset$, dan zijn A en B onafhankelijk.

a. beide beweringen zijn waar   **b.** alleen bewering (I) is waar
c. beide beweringen zijn onwaar   **d.** alleen bewering (II) is waar

8. [*Hoofdstuk 3*]
Een student heeft een tentamen 'voor zestig procent geleerd', d.w.z. op zestig procent van de vragen weet hij het antwoord. Een tentamen bestaat uit vijfkeuzevragen en als de student het goede antwoord niet weet, dan gokt hij , en gokt in 20 % van de gevallen het correcte antwoord. Hoe groot is per vraag de kans dat de student het goede antwoord invult?

a. 0.625 **b.** 0.667 **c.** 0.680 **d.** 0.700 **e.** 0.750 **f.** 0.800

9. [*Hoofdstuk 3*]
Deze vraag gaat over dezelfde student als de vorige vraag. Bereken de kans dat de student het antwoord op een vraag werkelijk wist als hij de vraag goed beantwoord heeft.

a. 0.6 **b.** 0.680 **c.** 0.700 **d.** 0.778 **e.** 0.857 **f.** 0.882

10. [*Hoofdstuk 3*]
Oliemaatschappijen willen graag weten waar zij hun boormachines de grond in steken. Met oliedetectoren zoeken zij naar olievelden. Stel een bepaalde detector geeft met kans 70 % terecht aan dat zich ergens olie bevindt, en met kans 15 % ten onrechte (in het tweede geval: de detector zegt "ja"maar het is "nee"). Geologisch onderzoek heeft uitgewezen dat zich in een bepaald gebied in 40 % van de bodem olie bevindt. Als op een willekeurige plek in dit gebied naar olie wordt gezocht, wat is dan de kans dat de detector een positief signaal geeft?

a. 0.27 **b.** 0.28 **c.** 0.30 **d.** 0.34 **e.** 0.37 **f.** 0.40

11. [Vervolg op de vorige vraag]
Als de detector op een zekere plek een positief signaal geeft, wat is de kans dat er zich op deze plek daadwerkelijk olie bevindt?

a. 0.28 **b.** 0.534 **c.** 0.69 **d.** 0.72 **e.** 0.757 **f.** 0.892

12. [*Hoofdstuk 4*]
Een zak bevat balletjes genummerd 0, 1, 2, . . . , 9. We trekken een willekeurig balletje, noteren het nummer, en leggen het balletje weer terug. Dit herhalen we tot we een cijfer voor de tweede keer zien. Het aantal trekkingen totdat dit gebeurt (dat is dus minimaal twee) noemen we X. Dan is $\mathrm{P}(X = 4)$ gelijk aan

a. 0.100 **b.** 0.111 **c.** 0.125 **d.** 0.167 **e.** 0.200 **f.** 0.216

13. [*Hoofdstuk 4*]
Een mier doorloopt de hoekpunten van een kubus op geheel willekeurige wijze: hij kiest telkens met kans $\frac{1}{3}$ een van de naastbijgelegen hoekpunten. Als hij zich op tijdstip 0 in hoekpunt A van het grondvlak bevindt, wat is dan de kans dat hij zich na drie verplaatsingen in het bovenvlak bevindt?

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{13}{27}$ **d.** $\frac{12}{27}$ **e.** $\frac{11}{27}$ **f.** $\frac{10}{27}$

14. [*Hoofdstuk 5*]
Stel het tijdstip (gemeten in uren) waarop een component het begeeft wordt gemodelleerd met een stochast T met een (Weibull)verdeling:

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-0.2t\sqrt{t}}, \quad \text{voor } \ t \geq 0$$

De kans dat de component het tussen tijdstip 4 en tijdstip 9 begeeft is dan gelijk aan

a. 0.0741 **b.** 0.1024 **c.** 0.0892 **d.** 0.1316 **e.** 0.0587 **f.** 0.1974

15. [vervolg op de vorige opgave]
Bereken de kans dat de component het vanaf tijdstip 4 nog minimaal vijf uur volhoudt, gegeven dat hij op tijdstip 4 nog functioneert.

a. 0.0224 **b.** 0.0423 **c.** 0.0528 **d.** 0.0741 **e.** 0.0892 **f.** 0.0688

16. [*Hoofdstuk 5*]
De inwonersaantallen van de dorpen en steden uit een zeker land worden gemodelleerd door een stochast X. X beschrijft het aantal inwoners in een willekeurige stad vermenigvuldigd met 10000. De dichtheid van X wordt gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}\,, & \text{voor } \ x \geq 0, \\ 0\,, & \text{voor } \ x < 0. \end{cases}$$

Bereken het percentage steden met meer dan 50000 inwoners.
(Voor uw gemak: $f'(x) = -\frac{3}{4}(x+1)^{-\frac{5}{2}}$ is de afgeleide en
$F(x) = -(x+1)^{-\frac{1}{2}}$ (+ constante) is een primitieve van f.)

a. 25 % **b.** 33 % **c.** 38 % **d.** 41 % **e.** 45 % **f.** 50 %

17. [*Hoofdstuk 5*]
Iemand werpt een pijltje op een vierkant dartbord met hoekpunten (0,0), (2,2), (2,0) en (0,2). Geef de coördinaten van het getroffen punt aan met (X, Y), en neem aan dat dit een volledig willekeurig punt van de 'schijf' is. Bereken $\text{P}(X + Y \geq 3)$.
Tip: maak een schets.

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{1}{4}$ **d.** $\frac{1}{6}$ **e.** $\frac{1}{8}$ **f.** $\frac{3}{4}$

18. [*Hoofdstuk 4,7*]
Stel Piet speelt elke maand mee in twee loterijen. In de ene loterij heeft hij kans 1 op 1500 op een prijs van meer dan 1000 euro, en in de loterij is die kans 1 op 2000. Stel Y is de periode totdat hij een keer zo'n grote prijs wint. De verwachting van Y is – in maanden – ongeveer gelijk aan

a. 432 **b.** 676 **c.** 782 **d.** 857 **e.** 2403 **f.** 3000

19. [*Hoofdstuk 5,7*]
Stel X is een continue stochast met dichtheid f en verdelingsfunctie F. Welke twee beweringen zijn correct:

a. $\mathrm{P}(X = 0) = F(0)$, en $\mathrm{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$.

b. $\mathrm{P}(X = 0) = F(0)$, en $\mathrm{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 F(x)dx$.

c. $\mathrm{P}(X = 0) = f(0)$, en $\mathrm{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$.

d. $\mathrm{P}(X = 0) = f(0)$, en $\mathrm{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 F(x)dx$.

e. $\mathrm{P}(X \le 0) = F(0)$, en $\mathrm{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$.

f. $\mathrm{P}(X \le 0) = F(0)$, en $\mathrm{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 F(x)dx$.

20. [*Hoofdstuk 5*]
Bereken de mediaan van de Pareto-verdeling met parameter $\alpha = 2$. (De mediaan is het getal m waarvoor $\mathrm{P}(X \le m) = 0.5$.)

a. 1.25 **b.** 1.41 **c.** 1.5 **d.** 1.66 **e.** 2 **f.** 4

21. [*Hoofdstuk 5,7*]
De verdelingsfunctie van de stochastische variabele X wordt gegeven door:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ , & \text{als } x \le 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x} \ , & 0 \le x \le 4, \\ 1 \ , & \text{als } x \ge 4 \end{cases}$$

Bereken $\mathrm{E}[X]$.

a. $1\frac{1}{4}$ **b.** $1\frac{1}{3}$ **c.** $1\frac{1}{2}$ **d.** $1\frac{2}{3}$ **e.** 2 **f.** $2\frac{1}{3}$

22. [vervolg op de vorige opgave]
Het 75 % percentiel van bovengenoemde stochast X is gelijk aan

a. 2 **b.** $2\frac{1}{4}$ **c.** $2\frac{1}{3}$ **d.** $2\frac{1}{2}$ **e.** 3 **f.** $3\frac{1}{2}$

23. [*Hoofdstuk 7*]
Stel X heeft verwachting μ en variantie σ^2. Voor welke a en b heeft de stochast $Y = aX + b$ verwachting 0 en variantie 1?

a. $a = 1/\sigma,\ b = -\mu$ **b.** $a = 1/\sigma,\ b = -\mu/\sigma$ **c.** $a = 1/\sigma,\ b = -\mu/\sigma^2$
d. $a = 1/\sigma^2,\ b = -\mu$ **e.** $a = 1/\sigma^2,\ b = -\mu/\sigma$ **f.** $a = 1/\sigma^2,\ b = -\mu/\sigma^2$

24. [*Hoofdstuk 8*]
Stel X en Y zijn onafhankelijke exponentiële variabelen met parameter $\lambda = 1$, en M is het maximum van X en Y. Dan geldt: $\mathrm{P}(1 \leq M \leq 2) =$

a. 0.054 **b.** 0.348 **c.** 0.400 **d.** 0.623 **e.** 0.704 **f.** 0.748

25. [*Hoofdstuk 8*]
Stel een stochast X neemt alleen positieve waarden aan. Dan geldt altijd

a. $\mathrm{E}[X] \leq \sqrt{\mathrm{E}[X^2]} \leq \left(\mathrm{E}\left[\sqrt{X}\right]\right)^2$ **b.** $\sqrt{\mathrm{E}[X^2]} \leq \mathrm{E}[X] \leq \left(\mathrm{E}\left[\sqrt{X}\right]\right)^2$

c. $\mathrm{E}[X] \leq \left(\mathrm{E}\left[\sqrt{X}\right]\right)^2 \leq \sqrt{\mathrm{E}[X^2]}$ **d.** $\sqrt{\mathrm{E}[X^2]} \leq \left(\mathrm{E}\left[\sqrt{X}\right]\right)^2 \leq \mathrm{E}[X]$

e. $\left(\mathrm{E}\left[\sqrt{X}\right]\right)^2 \leq \sqrt{\mathrm{E}[X^2]} \leq \mathrm{E}[X]$ **f.** $\left(\mathrm{E}\left[\sqrt{X}\right]\right)^2 \leq \mathrm{E}[X] \leq \sqrt{\mathrm{E}[X^2]}$

26. [*Hoofdstuk 8*]
Stel de stochast X heeft de dichtheid

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Stel $Y = X^2$. De dichtheid $f_Y(y)$ van Y wordt, voor $0 < y < 1$, gegeven door:

a. $2\sqrt{y}$ **b.** $\frac{3}{2}\sqrt{y}$ **c.** $3y$ **d.** $3y^2$ **e.** $3y\sqrt{y}$ **f.** $\frac{3}{2}y\sqrt{y}$

27. [*Hoofdstuk 9*]
X en Y hebben een gezamenlijke verdeling volgens de volgende tabel, waarin $p(a,b) = \mathrm{P}(X = a, Y = b)$:

		b				
$p(a,b)$		0	1	2	3	$p_X(a)$
a	1	0.10	0.10	0.05	0.05	0.30
	2	0.10	0.10	0.10	0.10	0.40
	3	0.05	0.05	0.10	0.10	0.30
$p_Y(b)$		0.25	0.25	0.25	0.25	1

Bereken $\mathrm{P}(X \leq 2 \,|\, Y = 1)$.

a. 0.15 **b.** 0.20 **c.** 0.25 **d.** 0.60 **e.** 0.67 **f.** 0.80

28. [*Hoofdstuk 10*]
X en Y hebben een gezamenlijke verdeling volgens de volgende tabel, waarin $p(a,b) = \mathrm{P}(X = a, Y = b)$:

		a			
$p(a,b)$		1	2	3	$p_Y(b)$
b	-1	0.15	0.10	0.10	0.35
	0	0.10	0.10	0.05	0.25
	2	0.20	0.10	0.10	0.40
$p_X(a)$		0.45	0.30	0.25	1

Bereken $\mathrm{E}[X - Y]$.

a. 0.20 **b.** 0.45 **c.** 0.75 **d.** 1.15 **e.** 1.35 **f.** 1.50

29. [*Hoofdstuk 10*]
X en Y hebben een gezamenlijke verdeling volgens de volgende tabel, waarin $p(a,b) = \mathrm{P}(X = a, Y = b)$:

		b				
$p(a,b)$		0	1	2	3	$p_X(a)$
a	-1	0.05	0.15	0.05	0.10	0.35
	0	0.00	0.05	0.15	0.05	0.25
	2	0.05	0.20	0.05	0.10	0.40
$p_Y(b)$		0.10	0.40	0.25	0.25	1

Bereken $\mathrm{E}[XY]$.

a. 0.15 **b.** 0.25 **c.** 0.35 **d.** 0.40 **e.** 0.50 **f.** 0.65

30. [*Hoofdstuk 10*]
Gegeven zijn drie onafhankelijke (en niet-constante) stochasten X, Y en Z met dezelfde verdeling. We vormen drie nieuwe stochasten: $S = X + Y$, $V = X - Y$ en $T = X + Y + Z$. Welke van de volgende uitspraken is dan zeker juist:

a. S en V zijn ongecorreleerd, S en T zijn ongecorreleerd
b. S en V zijn ongecorreleerd, S en T zijn negatief gecorreleerd
c. S en V zijn negatief gecorreleerd, S en T zijn ook negatief gecorreleerd
d. S en V zijn ongecorreleerd, S en T zijn positief gecorreleerd
e. S en V zijn negatief gecorreleerd, S en T zijn positief gecorreleerd
f. S en V zijn negatief gecorreleerd, S en T zijn ongecorreleerd

31. [*Hoofdstuk 10*]
Stel X, Y en Z zijn onafhankelijke Ber($\frac{1}{2}$) variabelen. Definieer $U = XY$ en $V = YZ$. Dan geldt:

a. U en V zijn afhankelijke Ber($\frac{1}{2}$) variabelen.
b. U en V zijn onafhankelijke Ber($\frac{1}{2}$) variabelen.
c. U en V zijn afhankelijke Ber($\frac{1}{4}$) variabelen.
d. U en V zijn onafhankelijke Ber($\frac{1}{4}$) variabelen.
e. U en V zijn afhankelijke Ber($\frac{1}{8}$) variabelen.
f. U en V zijn onafhankelijke Ber($\frac{1}{8}$) variabelen.

32. [*Hoofdstuk 10*]
Stel Z_1, Z_2 en Z_3 zijn onafhankelijke standaard normale variabelen. Definieer $X = Z_1 + 2Z_2$ en $Y = 2Z_2 + 3Z_3$. De covariantie $\mathrm{Cov}(X,Y)$ is dan gelijk aan

a. 2 **b.** $\sqrt{2}$ **c.** 3 **d.** $\sqrt{3}$ **e.** 4 **f.** $\sqrt{5}$

33. [*Hoofdstuk 12*]
Het aantal binnen één minuut binnenkomende metrotreinen in een metrostation wordt gemodelleerd met een Poissonvariable met parameter $\mu = 1$. Bereken de kans dat er in één minuut geen enkele trein binnenkomt.

a. 0.184 **b.** 0.307 **c.** 0.368 **d.** 0.612 **e.** 0.693 **f.** 0.816

34. [*Hoofdstuk 12*]
De tijdstippen waarop toerfietsers op een dag in juli de Col de la Solitude passeren vinden plaats volgens een Poissonproces met gemiddeld één fietser per twee uur. Bereken de kans dat er 's middags tussen twee en zes uur minstens twee fietsers de top passeren.

a. 0.2707 **b.** 0.3628 **c.** 0.406 **d.** 0.4324 **e.** 0.5676 **f.** 0.594

35. (Vervolg op de vorige opgave.)
Stel dat op een dag tussen negen uur 's ochtends en zeven uur 's avonds precies vier fietsers de col gepasseerd zijn. Hoe groot is de kans dat ze alle vier na twaalf uur bovenkwamen?

a. 0.2401 **b.** 0.3 **c.** 0.35 **d.** 0.4286 **e.** 0.7 **f.** 0.9919

Voor de volledigheid ook een paar vragen over de hoofdstukken 11 en 13.

---

36. [*Hoofdstuk 11*]
Stel X_1, X_2, X_3 zijn onafhankelijke stochasten met een normale verdeling met $\mu = 30$, $\sigma^2 = 12$. Bereken de kans dat $\bar{X}_3$, het gemiddelde, een waarde aanneemt tussen 30 en 33.

a. 0.273 **b.** 0.341 **c.** 0.433 **d.** 0.458 **e.** 0.477 **f.** 0.499

37. [*Hoofdstuk 11*]
De politie doet snelheidsmetingen op de A13. De metingen worden verondersteld zuiver te zijn, de meetfouten zijn normaal verdeeld met verwachting 0 en standaarddeviatie 3 (km/u). Bij elke passerende auto worden twee metingen gedaan, en als het gemiddelde hiervan boven de 102 km/u ligt dan krijgt de bestuurder een boete. Hoe groot is de kans dat iemand die 106 km/u rijdt geen boete krijgt?

a. 0.0113 **b.** 0.0296 **c.** 0.0325 **d.** 0.0363 **e.** 0.0512 **f.** 0.0718

38. [*Hoofdstuk 11*]
Stel Y heeft een standaardnormale verdeling.
Bereken a zodat $\mathrm{P}(-a \leq Y \leq a) = 0.85$.

a. 0.44 **b.** 0.38 **c.** 1.03 **d.** 1.44 **e.** 1.97 **f.** 2.17

39. [*Hoofdstuk 11*]
X heeft een $\mathcal{N}(0, 9)$ verdeling; Y is onafhankelijk van X en heeft een $\mathcal{N}(3, 1)$ verdeling. Bereken $\mathrm{P}(X + Y \geq 6)$.

a. 0.097 **b.** 0.109 **c.** 0.127 **d.** 0.171 **e.** 0.227 **f.** 0.242

40. [*Hoofdstuk 13*]
Als $S = U_1 + U_2 + \ldots + U_{24}$ met $U_1, \ldots, U_{24}$ onafhankelijke uniforme variabelen op [0,1] dan volgt met behulp van de ongelijkheid van Chebychev dat $\mathrm{P}(X \geq 16)$

a. ≤ 0.75 **b.** ≤ 0.9375 **c.** ≤ 0.0625 **d.** ≥ 0.0625 **e.** ≥ 0.25 **f.** ≤ 0.25

41. [*Hoofdstuk 13*]
$U_1, U_2, U_3...$, is een rij onafhankelijke stochastische variabelen met een uniforme verdeling op [0,2]. T_n is gedefinieerd door $T_n = \frac{1}{n}(U_1^2 + U_2^2 + ... + U_n^2)$. Voor welke a geldt: $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(|T_n - a| > \varepsilon\right) = 0$, voor elke $\varepsilon > 0$?
(Aanwijzing: pas de wet van de grote aantallen toe.)

a. $a = \frac{2}{3}$ **b.** $a = \frac{3}{4}$ **c.** $a = 1$ **d.** $a = \frac{4}{3}$ **e.** $a = \frac{3}{2}$ **f.** $a = 2$

42. [*Hoofdstuk 13*]
Stel $X_1, X_2, X_3, ...X_{50}$ zijn onafhankelijke stochasten met een exponentiële verdeling met parameter $\lambda = 2$.
De ongelijkheid van Chebychev geeft dat $p = \mathrm{P}(15 \leq X_1 + X_2 + ... + X_{50} \leq 35)$ voldoet aan

a. $p \geq \frac{3}{4}$ **b.** $p \geq \frac{7}{8}$ **c.** $p \geq \frac{9}{10}$ **d.** $p \leq \frac{3}{4}$ **e.** $p \leq \frac{7}{8}$ **f.** $p \leq \frac{9}{10}$