

Tentamen toegepaste statistiek voor TA (WI1275TA)

18 april 2012, 14:00-17:00

Afdeling Toegepaste Wiskunde, Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Rekenmachine toegestaan. Formuleblad/boek/aantekeningen niet toegestaan.

1. De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk en bovendien is bekend dat $P(A | B) = 1/2$ en $P(B | A) = 1/3$. Bereken $P(A \cap B)$.
2. Het is bekend dat de kans op kleurenblindheid bij jongens 1 op 20 en bij meisjes 1 op 100 is. Juffrouw Irene heeft een klas met 10 jongens en 20 meisjes.
 - (a) Geef voor een willekeurige leerling uit deze klas de kans op kleurenblindheid.
 - (b) Geeft de voorwaardelijke kans dat een leerling uit deze klas een jongen is, gegeven dat de leerling kleurenblind is.
3. Stel dat de stochastische variabele U een uniforme verdeling heeft op het interval $[0, 1]$. Laat zien dat $X = 1 - U$ ook uniform verdeeld is op $[0, 1]$.
4. Tijdstippen van overstromingen in een bepaald gebied vinden plaats volgens een Poisson proces. Het is bekend dat het verwachte aantal overstromingen over 50 jaar gelijk is aan 2.
 - (a) Bereken de kans op precies één overstroming in 50 jaar.
 - (b) Bereken de kans op tenminste twee overstromingen in 25 jaar.
5. Stel dat $X \sim \text{Binom}(2, 1/3)$ (dus X is Binomiaal verdeeld) en $Y \sim \text{Ber}(1/2)$ (dus Y heeft een Bernoulli verdeling). Veronderstel dat X en Y onafhankelijk zijn. Definieer $Z = XY$. Bereken de kansmassafunctie van Z .
6. We gooien een onzuivere munt achtereenvolgens totdat we voor het eerst kop gooien. We herhalen dit experiment 3 keer (met dezelfde munt). De aldus verkregen data zijn:
 - eerste experiment: eerste keer kop bij de 3de worp,
 - tweede experiment: eerste keer kop bij de 3de worp,
 - derde experiment: eerste keer kop bij de 4de worp.
 - (a) Noem p de kans op kop bij één keer gooien met de munt. Toon aan dat de loglikelihood wordt gegeven door

$$\ell(p) = 7 \log(1 - p) + 3 \log p$$

- (b) Stel dat we van het derde experiment alleen weten dat de eerste keer kop *na* de 4de worp wordt gegooid. Geef de likelihoodfunctie voor dit geval.

7. Stel dat x een realisatie van de stochastische variabele X is en dat X een exponentiële verdeling heeft met parameter λ . Dus X heeft kansdichtheid $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ als $x \geq 0$. We toetsen $H_0 : \lambda = 2$ tegen $H_1 : \lambda > 2$ door H_0 te verwerpen als $x < 1/6$.
- (a) Bereken de kans op een type 1 fout.
- (b) Bereken de kans op een type 2 fout, als $\lambda = 3$.
8. Stel dat we binaire data x_1, \dots, x_n hebben. Dus iedere x_i is ofwel gelijk aan 1, ofwel gelijk aan 0. We vatten x_1, \dots, x_n op als realisaties van onafhankelijke stochasten X_1, \dots, X_n uit een Bernoulli verdeling met parameter p .
- (a) Laat zien dat de schatter $S = \bar{X}_n$ zuiver is voor p .
- (b) Definieer $T = X_1$. Bereken de relatieve efficiëntie van S ten opzichte van T .
9. In een zevendaagse studie naar het effect van ozon is een groep van 14 ratten in een ozon-vrije omgeving, en een groep van 13 ratten in een ozon-rijke omgeving geplaatst. Voor iedere rat is de gewichtstoename (in grammen) gemeten. We vragen ons af of ozon een negatieve invloed heeft op gewichtstoename. We onderzoeken dit door de hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ te toetsen tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \mu_1 > \mu_2$. Hierbij zijn μ_1 en μ_2 de gewichtstoename voor een rat in de ozon-vrije en ozon-rijke omgeving respectievelijk. In de ozon-vrije omgeving is de gemiddelde gewichtstoename $\bar{x}_{14} = 22.40$; in de ozon-rijke omgeving $\bar{y}_{13} = 11.01$. De gepoolde standaard-deviatie is 4.58. De niet gepoolde standaard-deviatie is 4.14.
- Veronderstel dat de data normaal verdeeld zijn, met gelijke variantie in beide groepen. Ga na of de nulhypothese verworpen wordt bij significantieniveau 0.05.

Puntenverdeling bij vragen:

Opgave:	1	2a	2b	3	4a	4b	5	6a	6b	7a	7b	8a	8b	9
Punten:	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	1	2	2