

Tentamen Kanstat
WI1275TA
29 juni 2011, 14 – 17 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Een formuleblad wordt bijgeleverd. Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands (of Engels).

Normering: 1: 8 pt, 2: 7 pt, 3: 12 pt, 4: 10 pt, 5: 8 pt.

1. Een stochast X heeft de volgende dichtheid:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{als } |x| > 2 \\ c(1 - \frac{1}{4}x^2), & \text{als } -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

waarbij c een door jou te bepalen constante is

- a. Welke waarde moet c hebben?
(Als je dit onderdeel niet kunt oplossen: reken door met $c = 1/8$.)
 - b. Bereken waarde van de verdelingsfunctie F van X in de punten $x = -1$ en $x = 1$.
 - c. Noem de verdelingsfunctie van X maar even F . Geef een algemene formule voor $F(x)$, voor $-2 \leq x \leq 2$, en ook voor $x \geq 2$.
 - d. Bereken de verwachting van $2X + 1$.
2. Op het eiland Quaboum bevinden zich twee vulkanen: de Sjöloffyll en de Pacuyo. De tijdstippen van uitbarstingen van beide worden gemodelleerd met behulp van onafhankelijke Poissonprocessen met intensiteiten $\lambda_S = 0.04$ en $\lambda_P = 0.025$ (uitbarstingen per jaar).
- a. Bereken het verwachte totale aantal uitbarstingen in vijftig jaar. Licht je antwoord duidelijk toe!
 - b. Bereken de kans dat er de komende 20 jaar precies één uitbarsting plaatsvindt.
 - c. Als er in een periode van twintig jaar twee uitbarstingen plaatsvinden, bereken dan de (conditionele) kans dat dit allebei uitbarstingen van de Sjöloffyll zijn.

3. De hoofdprijs van de populaire televisiequiz Ik Baal van België wordt bepaald door blind te trekken uit een bak met vijftien genummerde ballen: 5,4,4,3,3,3,2,2,2,2 en 1,1,1,1,1. Elke bal is zijn nummer in duizenden euro's waard. De winnaar mag (zonder teruglegging) zoveel ballen trekken als hij/zij wil. Er is een *maar*: als twee ballen met hetzelfde nummer getrokken zijn, dan en is het spel uit en vervallen alle inkomsten. (Dus: trek je 3 en 4 en stop je, dan win je 7000 euro, trek je 2, 4 en 4, dan win je niks.)

- Als iemand van tevoren besluit om altijd tot en met een vijfde bal te gaan (mits natuurlijk het spel niet voortijdig over is), wat is dan de kans dat hij *niet* met lege handen naar huis gaat?
- Idem, maar dan stoppen na de tweede bal (dat is: een vrij behoudende strategie).
- Noem de prijs bij laatstgenoemde strategie maar even X . Geef de kansverdeling (in de vorm van een tabel) van X .
Om wat tijd uit te sparen mag je volstaan met het vermelden van de mogelijke uitkomsten en voor minstens de helft van deze uitkomsten de bijbehorende kans.

Een kandidaat kan het al of niet doorgaan natuurlijk ook af laten hangen van de nummers die reeds getrokken zijn.

Bijvoorbeeld: na elke getrokken bal kijken wat de verwachte 'meeropbrengst' is bij het trekken van een volgende bal, en stoppen zodra deze negatief is.

- Bereken de verwachte meeropbrengst na het trekken van een bal 4 en een bal 5.
4. Bladeren komen voor in vier verschillende typen: stijfsgroen, suikerwit, stijfswit en suikergroen, welke wij afkorten met StG, SuW, StW respectievelijk SuG. Deze komen voor met de volgende kansen:

StG	SuW	StW	SuG
$\frac{1}{4}(\theta + 2)$	$\frac{1}{4}\theta$	$\frac{1}{4}(1 - \theta)$	$\frac{1}{4}(1 - \theta)$

Stel een bioloog heeft n bladeren verzameld (en dit beschouwd kan worden als een random steekproef).

- Laat N_1 het aantal bladeren in zo'n steekproef zijn van type StG. Welke verdeling heeft N_1 ?
- Laat nu $T = 1 - \frac{4}{n}N_3$, met N_3 het aantal bladeren van type StW. Toon aan dat T een zuivere schatter is voor θ en bereken $\text{Var}(T)$.

- c. Geef een schatter S , gebaseerd op N_1 die zuiver is voor θ .

Stel nu dat een steekproef van $n = 420$ de volgende aantallen geeft:

type	aantal
StG	200
SuW	20
StW	110
SuG	90

- d. Geef de likelihood $L(\theta)$ die hoort bij deze data.

5. Studievereniging CriCie verkoopt als service aan de studenten boeken tegen een sterk gereduceerd tarief. Aan het begin van het studiejaar moeten voldoende boeken op voorraad zijn, en aan het eind blijven er hopelijk niet te veel boeken onverkocht (want wie weet komt de uitgever weer met een nieuwe druk). Begin augustus moet inkoper Sjaak beslissen hoeveel boeken Probability & Statistics hij gaat bestellen voor het eerstejaars vak kansrekening en statistiek. De ervaring leert dat van de eerstejaars gemiddeld 80% het boek koopt. Neem aan dat elke eerstejaars student, onafhankelijk van wat de andere studenten doen, 'kans' 0.8 heeft om het boek te kopen. Stel dat er bekend is dat de komende lichting 400 eerstejaars studenten bevat. Bij de volgende twee vragen moet je de centrale limietstelling inclusief de continuïteitscorrectie gebruiken (als je de correctie niet paraat hebt doe het dan zonder; dat kost je een kwart van de te behalen punten).

- a. Benader de kans dat er meer dan 330 boeken verkocht zullen worden.
- b. Hoeveel boeken moet Sjaak minimaal bestellen opdat de kans dat hij met een tekort te maken krijgt kleiner is dan 2%?

