Tentamen Kansrekening en Statistiek, WI1275TA
$22-1-2010$, 10.00–12.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een **berekening**, **toelichting en/of motivatie** aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands (of Engels). Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan.

---

1. Een zak bevat twee rode en drie witte ballen. Drie keer wordt er een bal uit getrokken. Is deze wit, dan wordt hij teruggestopt, is hij rood, dan wordt hij teruggelegd met een extra rode bal. Bereken achtereenvolgens

a. De kans dat de tweede bal wit is gegeven dat de eerste bal rood is.

b. De kans dat de eerste bal rood was gegeven dat de tweede bal wit is.

c. De kans dat de eerste drie ballen dezelfde kleur hebben.

2. Een stochast X heeft verdelingsfunctie $F(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{als } x \leq 0 \\ 1\ , & \text{als } x \geq 4 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x}, & \text{als } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Bereken achtereenvolgens

a. $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 2\right)$ en $\mathrm{P}(3 \leq X \leq 6.25)$.

b. De mediaan van X.

c. De variantie van X.

d. Laat nu $Y = 1/X$. Bereken de dichtheid van Y.

3. Stel $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ zijn onafhankelijke normale variabelen met parameters $\mu = 5$ resp. $\sigma = 3$. Laat $S = X_1 + X_2 + \ldots X_{100}$. Bereken $\mathrm{P}(S \geq 530)$.

4. X_1, X_2 en X_3 zijn onafhankelijke stochasten met een $\mathrm{Ber}(\frac{1}{2})$ verdeling.
Laat $U = X_1 + X_2$ en $V = X_1X_2X_3$ (d.w.z. het product).

a. Geef (met een goed argument) aan of U en V afhankelijk of onafhankelijk zijn.

b. Geef de volledige tabel met de simultane verdeling en de marginale verdelingen van U en V.

5. Stel de tijdstippen van aardbevingen in een bepaald gebied in de tijd worden gemodelleerd met een Poissonproces met intensiteit één per drie jaar.

a. Hoe groot is de kans dat er in een periode van vijf jaar meer dan twee aardbevingen plaatsvinden?

b. Bereken de kans dat de eerste aardbeving plaatsvindt in de periode die loopt van jaar zes tot en met jaar vijftien.

UITWERKINGEN

1a Dit is nogal erg eenvoudig: is de eerste bal rood, dan wordt de tweede bal getrokken uit een zak met drie rode en drie witte ballen. De kans op wit is dan natuurlijk 1/2.

1b Met voor de hand liggende notatie: gevraagd $\mathrm{P}(R_1 \,|\, W_2)$.
Ten eerste

$$\mathrm{P}(W_2) = \mathrm{P}(W_1)\,\mathrm{P}(W_2 \,|\, W_1) + \mathrm{P}(R_1)\,\mathrm{P}(W_2 \,|\, R_1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6} = \frac{14}{25}$$

Dan:

$$\mathrm{P}(R_1 \,|\, W_2) = \frac{\mathrm{P}(R_1 \cap W_2)}{\mathrm{P}(W_2)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}}{\frac{14}{25}} = \frac{5}{14}$$

1c Dit is de kans op 'drie keer rood of drie keer wit':

$$\mathrm{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + \mathrm{P}(W_1 \cap W_2 \cap W_3) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{7} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} \quad (\approx 0.3303)$$

2a $\mathrm{P}\big(\frac{1}{2} \le X \le 2\big) = F(2) - F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}) = 0.3536$, en analoog
$\mathrm{P}(3 \le X \le 6.25) = F(6.25) - F(3) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.134$.

2b Gevraagd wordt de m waarvoor $\mathrm{P}(X \le m) = \frac{1}{2}$.
Op te lossen: $F(m) = \frac{1}{2}\sqrt{m} = \frac{1}{2}$. Duidelijk: $m = 1$.

2c De dichtheid van X: $f(x) = F'(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}$, $0 \le x \le 4$.
$\mathrm{E}[X] = \int_0^4 x \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^4 \frac{1}{4}\sqrt{x}\,dx = \big[\frac{1}{6}x\sqrt{x}\big]_0^4 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.
Analoog $\mathrm{E}[X^2] = \int_0^2 \frac{1}{4}x\sqrt{x}\,dx = \big[\frac{1}{10}x^2\sqrt{x}\big]_0^4 = \frac{32}{10}$.
Dan volgt: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \frac{32}{10} - \frac{16}{9} = 1.422$.

2d Toegegeven, dit is wat minder eenvoudig.
Ten eerste geldt: $0 \le X \le 4$, dus $Y = 1/X$ neemt waarden aan in $[1/4, \infty)$, wat betekent dat buiten het genoemde interval de dichtheid (van Y) gelijk is aan 0. Vervolgens: eerst de verdelingsfunctie van Y bepalen: (voor $y \ge 1/4$:)

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}(1/X \le y) \overset{!!}{=} \mathrm{P}(X \ge 1/y) = 1 - \mathrm{P}(X \le 1/y) = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{1/y} = 1 - \tfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

De dichtheid is de afgeleide van de vdf, dus het (volledige) antwoord wordt

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}}, & \text{als } y \le 1/4 \\ 0\ , & \text{alle andere } y. \end{cases}$$

3 De som van onafhankelijke normale variabelen is weer normaal verdeeld. In dit geval: $\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[X_1] + \ldots + \mathrm{E}[X_{100}] = 500$, en $\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_{100}) = 3^2 + 3^2 + 3^2 + \ldots + 3^2 = 900$. Dan

$$\mathrm{P}(S \geq 530) = \mathrm{P}\left(\frac{S - 500}{\sqrt{900}} \geq \frac{530 - 500}{\sqrt{900}} = 1\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1) \approx 0.1587.$$

4a Als $V = 1$, dan moet $X_1 = X_2 = X_3 = 1$, dus ook $U = 2$. Dat betekent dat $\mathrm{P}(U = 2 \,|\, V = 1) = 1$, terwijl duidelijk $\mathrm{P}(U = 2) \neq 1$.

4b Ten eerste: V kan alleen de waarden 0 en 1 aannemen.
Bij **a.** is de enige situatie genoemd waarin $V = 1$, dus $\mathrm{P}(V = 1) = 1/8$, en blijft over $\mathrm{P}(V = 0) = 7/8$.
Ten tweede: U heeft een Bin$(2,\frac{1}{2})$ verdeling ($\mathrm{P}(U = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(U = 1) = \frac{1}{2}$, enz).
Daarmee zijn de marginale verdelingen bekend.
Verder geldt: $\mathrm{P}(U = 2, V = 1) = \mathrm{P}(X_1 = X_2 = X_3) = \frac{1}{8}$. De rest van de tabel kun je invullen door het 'kloppend maken' van de rij- en kolomsommen.

$p(a,b)$		a			$p_V(b)$
		0	1	2	
b	0	1/4	1/2	1/8	7/8
	1	0	0	1/8	1/8
$p_U(a)$		1/4	1/2	1/4	1

5a Als we als rekeneenheid voor de tijd een jaar nemen, dan is de intensiteit 1/3.
Het aantal inslagen, zeg N, op het interval [0,5] heeft een Poisson$(5 \cdot 1/3)$ verdeling.

$\mathrm{P}(N > 2) = 1 - \mathrm{P}(N = 0, 1 \text{ of } 2) = 1 - (\mathrm{P}(N = 0) + \mathrm{P}(N = 1) + \mathrm{P}(N = 2)) = \ldots = 0.234$

Bijv. $\mathrm{P}(N = 2) = \dfrac{(5/3)^2}{2!}\, e^{-5/3} = 0.2623.$

5b Gevraagd wordt $\mathrm{P}\big(N_{[0,5]} = 0 \cap N_{(5,15]} > 0\big) = \mathrm{P}\big(N_{(0,5]} = 0\big)\,\mathrm{P}\big(N_{(5,15]} > 0\big)$, vanwege de onafhankelijkheid die zit ingebakken in een Poissonproces. Opnieuw: het aantal in periode [0,5] heeft een Poisson (5/3) en het aantal in de periode (5,15] een Poisson (10/3) verdeling, en verder is $\mathrm{P}(N > 0) = 1 - \mathrm{P}(N = 0)$, dus het antwoord wordt

$$\mathrm{P}\big(N_{(0,5]} = 0\big)\,\mathrm{P}\big(N_{(5,15]} > 0\big) = \frac{(5/3)^0}{0!}\, e^{-5/3} \cdot \left(1 - \frac{(10/3)^0}{0!}\, e^{-10/3}\right) = 0.1821.$$

Punten: opg.1 9; opg2 11; opg.3 4; opg.4 6; opg.5 6

Cijfer: (totaal/4)+1, afgerond op halven