Tentamen Kansrekening en Statistiek, WI1275TA
23 – 1 – 2009, 9.00–11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een **berekening**, **toelichting en/of motivatie** aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands (of Engels). Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan.

---

1. Een stochast X heeft de dichtheid $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & , \text{ als } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x & , \text{ als } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & , \text{ buiten het interval } [0,\, 4] \end{cases}$

(Tip: Maak een schets, dan zie je waarom dit een driehoeksverdeling genoemd wordt. Je kunt/mag een aantal van de volgende vragen beantwoorden via de schets.)

- **a.** Bereken $\mathrm{P}(1 \leq X \leq 3)$.
- **b.** Bereken de verwachting en de variantie van X.
- **c.** Bereken het derde kwartiel van X, d.w.z. het getal q waarvoor $\mathrm{P}(X \leq q) = 3/4$.

2. Een zak bevat aan het begin een witte en een rode knikker. Xander pakt een knikker, en legt die terug met een knikker van dezelfde kleur. Dan trekt hij nog een keer, met dezelfde procedure. Vervolgens gaat Yannick door en trekt ook twee keer (met teruglegging van telkens twee ballen van dezelfde kleur). Het aantal witte knikkers dat Xander getrokken heeft noemen we X, dat van Yannick Y.

- **a.** Bereken $\mathrm{P}(X = 1)$ en $\mathrm{P}(Y = 0)$.
- **b.** Bereken $\mathrm{P}(Y = 2 \,|\, X = 1)$ en $\mathrm{P}(X = 1 \,|\, Y = 2)$.
- **c.** Zal $\mathrm{Cov}(X, Y)$ positief of negatief zijn? Geef geen berekening, maar een intuïtief argument.

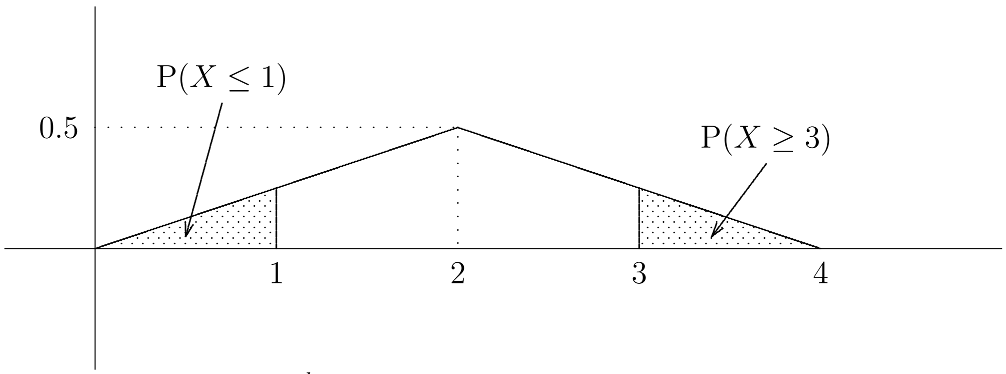
3. Stel Z_1, Z_2, Z_3 zijn onafhankelijke standaard normale variabelen.
Laat $X = Z_1 + 3Z_2 + 2$, $Y = 3Z_3 - Z_2 + 4$.

- **a.** Bereken $\mathrm{P}(X \leq 3)$.
- **b.** Toon aan dat $\mathrm{E}[Z_1^2] = 1$ en bereken $\mathrm{E}[X^2]$.
- **c.** Bereken $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

4. Stel de tijdstippen van meteorietinslagen in een bepaald gebied in de tijd worden gemodelleerd met een Poissonproces met intensiteit $\lambda = 0.25$ per jaar.

- **a.** Hoe groot is de kans dat er in een periode van vijf jaar precies één meteorietinslag plaatsvindt?
- **b.** Stel T_1 is het tijdstip van nu tot het moment van de eerste meteorietinslag. Bereken $\mathrm{P}(T_1 \geq 2)$.
- **c.** Bereken $\mathrm{E}[T_1]$.

UITWERKINGEN



1a $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx =$ oppervlakte onder dichtheid.
Uit het plaatje volgt: $\mathrm{P}(X \leq 1) = \mathrm{P}(X \geq 3) =$ opp. van driehoek $= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0.25 = 0.125$, dus $\mathrm{P}(1 \leq X \leq 3) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 1) - \mathrm{P}(X \geq 3) = 1 - 0.125 - 0.125 = 0.75$.

1b Op grond van de symmetrie is duidelijk: $\mathrm{E}[X] = 2$.
$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X-2]^2 = \int_0^4 (x-2)^2 f(x)dx =^* 2\int_0^2 (x-2)^2 f(x)dx = 2\int_0^2 \frac{1}{4}x(x-2)^2 dx = \ldots = 2/3$.
(De stap $=^*$ is correct vanwege de symmetrie t.o.v. $x = 2$ van de integrand $(x-2)^2 f(x)$)
Ook mogelijk:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2 = \int_0^2 x^2 \cdot \tfrac{1}{4}x\,dx + \int_2^4 x^2 \cdot (1 - \tfrac{1}{4}x)\,dx - 2^2 = \ldots = 1 + \tfrac{11}{3} - 4 = \tfrac{2}{3}$$

1c Ook dit gaat weer het snelst via de grafiek van de dichtheid. Het is evident dat het derde kwartiel q zich ergens tussen 2 en 4 (zelfs: tussen 2 en 3) bevindt. Er moet gelden: $\mathrm{P}(X \geq q) = 1/4$, en $\mathrm{P}(x \geq q)$ is weer de opp. van een driehoek:

$$\mathrm{P}(x \geq q) = \frac{1}{2}(4-q)(1 - \tfrac{1}{4}q) = \frac{1}{2}(4-q)\frac{1}{4}(4-q) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (4-q)^2 = 2 \Leftrightarrow q = 4 \pm \sqrt{2}.$$

Aangezien $2 \leq q \leq 4$ volgt $q = q_{0.75} = 4 - \sqrt{2}$.

Alternatief: voor $q \geq 2$ geldt

$$\mathrm{P}(X \geq q) = \int_q^4 1 - \tfrac{1}{4}x\,dx = \left[x - \tfrac{1}{8}x^2\right]_q^4 = 4 - \tfrac{16}{8} - q + \tfrac{1}{8}q^2 = \tfrac{1}{8}q^2 - q + 2$$

En vervolgens oplossen $\frac{1}{8}q^2 - q + 2 = \frac{1}{4}$, waarbij natuurlijk $2 \leq q \leq 4$.

De *abc*-formule levert $q_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{7}{8}}}{\frac{2}{8}} = \ldots = 4 \pm \sqrt{2}$,

en het antwoord wordt (weer) (gelukkig maar) $q_{0.25} = 4 - \sqrt{2}$.

2a $\mathrm{P}(X=1) = \mathrm{P}((w,r)) + \mathrm{P}((r,w)) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.
$\mathrm{P}(Y=0) = \mathrm{P}((w,w,r,r)) + \mathrm{P}((w,r,r,r)) + \mathrm{P}((r,w,r,r)) + \mathrm{P}((r,r,r,r)) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{2}{4}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5} = \frac{1}{3}$.

2b Als $X=1$, dan begint Yannick met een 'zak' $\{w,w,r,r\}$. De kans op twee keer wit is dan $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = \mathrm{P}(Y=2 \,|\, X=1)$.
Voor de andere conditionele kans: gebruik de definitie: $\mathrm{P}(X=1 \,|\, Y=2) = \frac{\mathrm{P}(X=1 \cap Y=2)}{\mathrm{P}(Y=2)}$.
Vanwege de symmetrie wit versus rood is $\mathrm{P}(Y=2) = \mathrm{P}(Y=0) = 1/3$ (onderdeel **a.**)
Voor de teller

$$\mathrm{P}(X=1 \cap Y=2) = \mathrm{P}(X=1)\,\mathrm{P}(Y=2 \,|\, X=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{10}.$$

Het antwoord wordt dan $\frac{1/10}{1/3} = \frac{3}{10}$.

2c X en Y zullen positief gecorreleerd zijn: als X hoog (dan wel laag) is, dan begint Yannick met meer (dan wel minder) witte ballen, dus zal Y waarschijnlijk hoger (dan wel lager) zijn dan gemiddeld. Er is dus een positief 'verband' tussen X en Y.

3a X heeft een normale verdeling met parameters $\mu = 2$ en $\sigma^2 = 1^2 + 3^2 = 10$.

$$\mathrm{P}(X \leq 3) = \mathrm{P}\left(\frac{X-2}{\sqrt{10}} \leq \frac{3-2}{\sqrt{10}}\right) = \mathrm{P}(Z \leq 0.3162) \approx 1 - 0.48 = 0.52.$$

3b $\mathrm{E}[Z_1^2] = \mathrm{Var}(Z_1) + \mathrm{E}[Z_1]^2 = 1 + 0 = 1$.

$\mathrm{E}\left[X^2\right] = \mathrm{E}\left[(Z_1 + 3Z_2 + 2)^2\right] = \mathrm{E}\left[Z_1^2 + 9Z_2^2 + 4 + 2Z_1Z_2 + 4Z_1 + 6Z_2\right] = 1{+}9{+}4{+}0{+}0{+}0 = 14$.
Opm. $\mathrm{E}[Z_1Z_2] = 0$ volgt uit de onafhankelijkheid:
X, Y onafh $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] = 0 \Rightarrow \mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]$.

3c Twee mogelijkheden: $X + Y = Z_1 + 2Z_2 + 3Z_3 + 5 \sim \mathcal{N}(5, 1^2 + 2^2 + 3^2) = \mathcal{N}(5, 14)$, dus i.h.b. $\mathrm{Var}(X+Y) = 14$.
$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$ geeft
$\mathrm{Cov}(X,Y) = (\mathrm{Var}(X+Y) - \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y))/2 = (14 - 10 - 10)/2 = -3$.
Alternatief: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X-2, Y-4) =$
$= \mathrm{E}[(Z_1 + 3Z_2)(3Z_3 - Z_2)] - \mathrm{E}[Z_1 + 3Z_2]\,\mathrm{E}[3Z_3 - Z_2]$, en dan stug doorrekenen.

4a Het aantal inslagen, zeg N op het interval [0,5] heeft een Poisson($0.25 \cdot 5$) verdeling.
$\mathrm{P}(N=1) = \frac{1.25^1}{1!} e^{-1.25} \approx 0.358$.

4b $T_1 \geq t$ betekent: nul inslagen op het interval $[0,\, t]$.
Het aantal inslagen X op het interval $[0, t]$ heeft een Poisson$(0.25 \cdot t)$ verdeling.
De kans dat er geen inslagen zijn op $[0,\, t]$: $\mathrm{P}(X = 0) = e^{-0.25t}$.
Voor $t = 2$ levert dit $\mathrm{P}(T_1 \geq 2) = e^{-0.25 \cdot 2} = e^{-0.5} \approx 0.607$.

4c Uit de afleiding bij **b** volgt: T_1 heeft een Exp(0.25) verdeling (wat ook een algemene eigenschap is voor een Poissonproces). Dus $\mathrm{E}[T_1] = 1/0.25 = 4$.