Tentamen Kanstat WI1275TA
26 augustus 2009, 14 − 16 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Een formuleblad wordt bijgeleverd. Normen: 1: 6; 2: 6; 3: 9; 4: 6.
Een antwoord moet voorzien zijn van een berekening, toelichting en/of motivatie. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands (of Engels).

---

1. Om een ronde tafel staan 6 stoelen. Er komen 4 mannen en 2 vrouwen binnen die op een willekeurige manier een stoel uitzoeken. Definieer de gebeurtenis A door "De twee vrouwen zitten naast elkaar" en B door "Er is een groepje van minstens drie mannen die naast elkaar zitten." Bepaal

a. $\mathrm{P}(A)$; **b.** $\mathrm{P}(B)$; en **c.** $\mathrm{P}(A \mid B)$.

2. Rokende en niet-rokende vrouwen hebben verschillende kansen om zwanger te worden. Neem aan dat een niet-rokende vrouw die zwanger *wil* worden kans 0.3 heeft om binnen een maand zwanger te worden (en dat die kans in opeenvolgende maanden hetzelfde blijft). Voor vrouwen die wel roken is deze kans 0.2. Stel twee vriendinnen, Sonja en Lida, de eerstgenoemde wel, de ander niet rokend, besluiten tegelijk dat ze zwanger willen worden.

a. Wat is dan de kans dat ze binnen drie maanden allebei zwanger zijn?

b. Hoe groot is de kans dat ten minste een van beiden binnen twee maanden zwanger is?

3. Een stochast X heeft verdelingsfunctie $F(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{als } x \leq 0 \\ 1\ , & \text{als } x \geq 4 \\ x^2/16, & \text{als } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$
Bereken achtereenvolgens

a. $\mathrm{P}(1 \leq X \leq 3)$ en $\mathrm{P}(3.5 \leq X \leq 4.5)$.

b. De variantie van X.

c. De verdelingsfunctie F_Y van de stochast $Y = X^2$.

4. Om de nauwkeurigheid van een weeginstrument te onderzoeken wordt een serie metingen van een standaardgewicht van 10 gram uitgevoerd. De aannamen zijn dat de metingen normaal verdeeld zijn met (onbekende) verwachting μ, en standaardafwijking $\sigma = 0.025$ gram.

a. Stel het ijkgewicht wordt tien keer gewogen en het gemiddelde van de tien metingen is 10.016 gram. Geef een 98% betrouwbaarheidsinterval voor μ.

b. Hoeveel metingen moeten er (minimaal) gedaan worden om een 98 % betrouwbaarheidsinterval te krijgen dat korter is dan 0.02 gram?

Antwoorden open vragen

1a Neem de eerste vrouw als referentiepunt: van de overige 5 plaatsen zijn er 2 *naast* haar. Dus $\mathrm{P}(A) = \frac{2}{5}$.

b. $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\text{vrouwen zitten niet tegenover elkaar}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

c. Omdat $A \subset B$ geldt $A \cap B = A$ en dus $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)\,/\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$.

2a De kans dat Sonja *niet* binnen 3 mnd zwanger is, is $(1-0.3)^3$, dus met kans $1-(1-0.3)^3 = 0.657$ is Sonja binnen 3 mnd. zwanger. Voor Lida is deze kans gelijk aan $1-(1-0.2)^3 = 0.488$. De kans dat beiden binnen 3 mnd. zwanger zijn is vanwege de aangenomen onafh. gelijk aan het product: $0.657 \cdot 0.488 \approx 0.321$.

2b Dit is 1 minus de kans dat ze allebei niet zwanger zijn, en dat is als bij onderdeel **a.** gelijk aan $1-(1-0.3)^2 \cdot (1-0.2)^2 = 0.6864$.

3a $\mathrm{P}(1 \le X \le 3) = F(3) - F(1) = \frac{1}{16}(9-1) = 0.5$, en analoog
$\mathrm{P}(3.5 \le X \le 4.5) = F(4.5) - F(3.5) = 1 - 3.5^2/16 = 0.234$.

3b De dichtheid van X: $f(x) = F'(x) = \frac{1}{8}x$, voor $0 \le x \le 4$.
$\mathrm{E}[X] = \int_0^4 x \cdot \frac{1}{8}x\,dx = \int_0^4 \frac{1}{8}x^2\,dx = ... = \frac{8}{3} = 2.666....$
Analoog $\mathrm{E}[X^2] = \int_0^4 \frac{1}{8}x^3\,dx = 8$.
Dan volgt: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = 8 - (8/3)^2 = 8/9 = 0.888....$

3c Ten eerste, $0 \le X \le 4 \longrightarrow 0 \le Y \le 16$, dus $F_Y(y) = 0$ voor $y \le 0$ en $F_Y(y) = 1$ voor $y \ge 16$. Verder, voor $0 < y < 16$

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}\big(X^2 \le y\big) = \mathrm{P}(X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2/16 = y/16.$$

4a Het gemiddelde van 10 metingen heeft een $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/10)$ verdeling. Een 98 % betrouwbaarheidsinterval heeft de grenzen

$$\bar{x}_{10} \pm z_{0.01} \cdot \frac{0.025}{\sqrt{10}}, \text{ waarbij } z_{0.01} = 2.326 \text{ (afgerond: 2.33)}$$

dus dat wordt $[9.998, 10.034]$.

4b Het interval wordt bij n metingen kleiner dan 0.02 gram als

$$2z_{0.01}\frac{0.025}{\sqrt{n}} \le 0.02$$

dus als

$$\sqrt{n} \ge \frac{2z_{0.01}0.025}{0.02} \approx 5.82$$

Oftewel, als $n \ge 5.82^2 = 33.8...$, dus, aangezien n geheel moet zijn: $n \ge 34$.

NORMEN:

1. 3×1; **2.** 3 + 4; **3a.** 1+2; **3bc.** 2+3; **4.** 6; **5a.** 1+1+1; **5b.** 1+1+1;
5c. 1+2; **5d.** 3; **6.** 2 + 4 + 2 +2 +2.