Tentamen Kanstat
WI1275TA
28 maart 2008, 14 − 17 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Een formuleblad wordt bijgeleverd.
Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands (of Engels).

---

1. Een bak bevat twee rode en drie witte ballen. Er wordt een bal getrokken en teruggelegd met een extra bal van dezelfde kleur.

a. Bereken de kans dat de tweede bal rood is, gegeven dat de eerste bal rood is.

b. Bereken de kans dat er twee keer een bal met dezelfde kleur wordt getrokken

c. Als je alleen weet dat de tweede bal wit is, wat is dan de kans dat de eerste bal ook wit was?

2. Zes mensen staan op de begane grond voor de lift in een warenhuis met vijf verdiepingen. De verdiepingen waar zij heen willen zijn onafhankelijk van elkaar, en we nemen aan dat elk van de verdiepingen dezelfde 'kans' heeft om door een willekeurige bezoeker gekozen worden. We voeren drie stochasten in:

X: het aantal verschillende etages waar de zes personen heen willen.
Y: het aantal personen dat naar de tweede etage wil.
Z: de hoogste etage die wordt gekozen.

a. Welk van de drie heeft een binomiale verdeling, en wat zijn de parameters daarvan?

b. Bereken voor elk van de drie stochasten de kans op uitkomst 2.

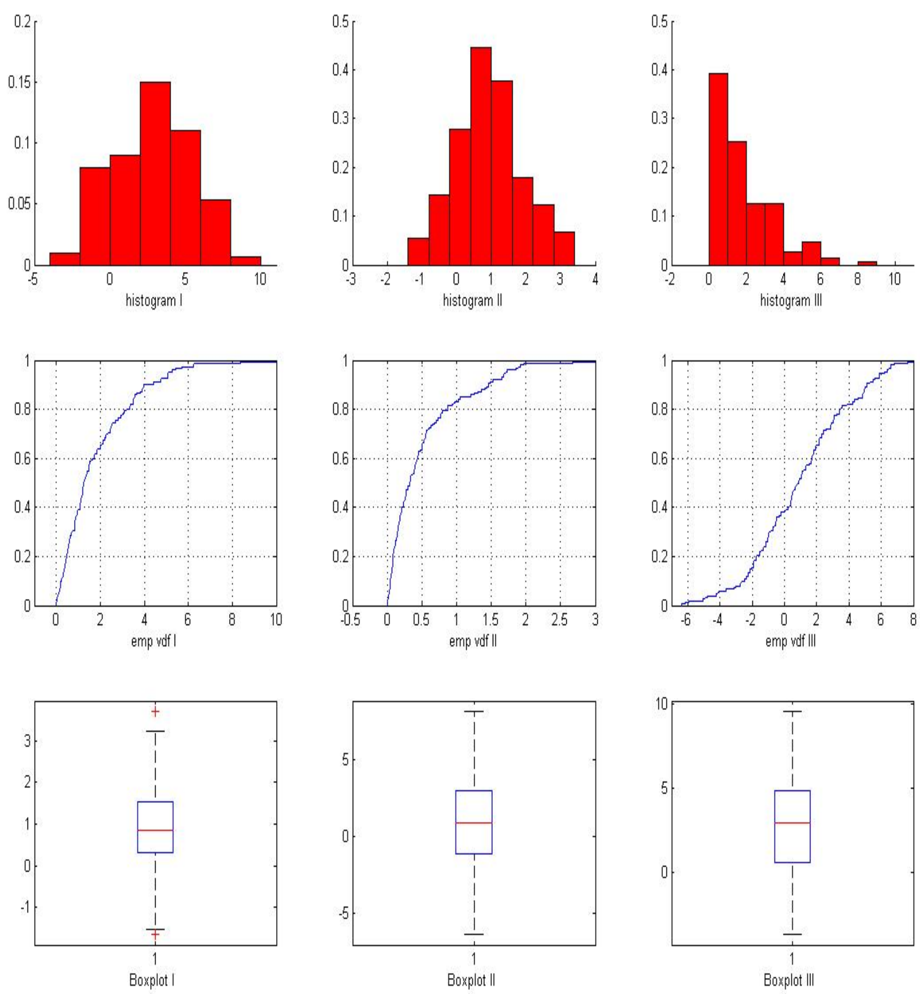
3. Een stochast X heeft verdelingsfunctie $F(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{als } x \leq 0 \\ 1\ , & \text{als } x \geq 4 \\ x^2/16, & \text{als } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$
Bereken achtereenvolgens

a. $\mathrm{P}(1 \leq X \leq 3)$ en $\mathrm{P}(3.5 \leq X \leq 4.5)$.

b. Het eerste kwartiel $q_{0.25}$ van X.

c. De variantie van X.

4. Hieronder tref je negen plaatjes aan van trekkingen van 150 elementen uit de volgende vijf verdelingen:
$\mathcal{N}(1, 3^2)$, $\mathcal{N}(3, 3^2)$, $\mathcal{N}(1, 1)$, $\text{Exp}(2)$ en $\text{Exp}(1/2)$.
Geef voor elk van de negen aan welke verdeling het meest waarschijnlijk is **en waarom**.



5. Stel $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$ zijn zuivere schatters voor een parameter c, met variantie 3, en $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{15}$ zijn eveneens zuivere schatters voor c, maar met $\text{Var}(Y_i) = 6$.

a. Toon aan dat $T = \frac{2}{3}\bar{X}_{12} + \frac{1}{3}\bar{Y}_{15}$ een zuivere schatter is voor c.

b. Bereken de variantie van T.

6. Om de nauwkeurigheid van een weeginstrument te onderzoeken wordt een serie metingen van een standaardgewicht van 10 gram uitgevoerd. De aannamen zijn dat de metingen normaal verdeeld zijn met (onbekende) verwachting μ, en standaardafwijking $\sigma = 0.025$ gram.

a. Stel het ijkgewicht wordt tien keer gewogen en het gemiddelde van de tien metingen is 10.016 gram. Geef een 98% betrouwbaarheidsinterval voor μ.

b. Hoeveel metingen moeten er (minimaal) gedaan worden om een 98 % betrouwbaarheidsinterval te krijgen dat korter is dan 0.02 gram?

c. Na een nieuwe ijking willen we een toets uitvoeren om te zien of deze goed heeft plaatsgevonden.
We nemen als nulhypothese $\mu = 10$ en als alternatieve hypothese $H_1 : \mu \neq 10$, en als significantieniveau $\alpha = 2\,\%$.
Er worden opnieuw tien (onafhankelijke) metingen gedaan. Deze hebben gemiddelde 9.986 gram.
Onderzoek of de nulhypothese wel of niet verworpen wordt.

7. Een geoloog wil onderzoeken of in een bepaald gebied de sporen van een zeker materiaal zich op 'willekeurige' locaties bevinden. Daartoe heeft hij het (rechthoekige) gebied in 100 gelijke deelgebieden verdeeld. De tabel bevat de aantallen sporen per deelgebied

# sporen	0	1	2	3	4	5	6	7
# gebieden	34	26	17	10	5	4	3	1

Dus: er zijn 34 deelgebieden zonder sporen, 26 deelgebieden met 1 spoor, enz.
Laat X de stochast zijn die beschrijft: het aantal sporen in een deelgebied.

a. Wat is het gemiddelde aantal sporen per deelgebied?

b. Leg uit waarom onder de aanname van 'willekeurige locaties' de stochast X (bij benadering) een Poissonverdeling zal hebben. Geef ook een *beargumenteerde* schatting van de paramater μ op grond van de data.

c. Geef een tabel waarin je de empirische kansen vergelijkt met de theoretische kansverdeling van X, met de in het vorige onderdeel bepaalde schatting van μ. (Als je geen schatting gevonden hebt, reken dan met de waarde $\mu = 1.25$.)

d. Geef de likelihoodfunctie en de loglikelihoodfunctie van μ op grond van de data.
Vereenvoudig de laatste zover mogelijk en bereken de maximum-likelihood schatting van μ.