Tussentoets Kansrekening en Statistiek voor Technische Aardwetenschappen, 1 februari 2006, 14:00-15:30

De toets bestaat *alleen* uit *open vragen*. Alle antwoorden moeten zijn voorzien van een (korte) argumentatie, dus laat bij elke vraag zien hoe je aan het antwoord bent gekomen. Een vraag waarbij alleen het antwoord is vermeld, wordt niet goed gerekend. Voor meer duidelijkheid omcirkel de uiteindelijke antwoorden.

Gedurende het tentamen mag een zelfgemaakt uittreksel van hooguit twee A4 gebruikt worden en een rekenmachine.

1. Voor twee gebeurtenissen A en B is gegeven dat $P(A) = 0.5$, $P(A|B) = \frac{2}{3}$ en $P(A|B^c) = \frac{3}{7}$. Wat is $P(B)$?

2. André heeft twee kinderen, en wij weten dat tenminste één van zijn kinderen een meisje is. Als wij aannemen dat de kans op meisje 1/2 is en is onafhankelijk van andere aanwezige kinderen, wat is dan de kans dat het andere kind ook een meisje is?

3. De kans dat iemand besmet is met een bepaalde SOA is 0.001. Om vast te stellen of iemand deze SOA heeft is een test ontwikkeld. Ben je besmet, dan is de kans 0.99 dat de test de uitslag "besmet" geeft. Ben je niet besmet, dan is de kans 0.99 dat de test de uitslag "niet besmet" geeft.
   a) Wat is de kans dat een proefpersoon besmet is, als de test de uitslag "besmet" geeft?
   b) Wat is de (totale) kans dat de test de uitslag "besmet" geeft? (Dus in dit geval weet je niet of een proefpersoon besmet is of niet).

4. Bereken de mediaan van een Exponentiele $Exp(\lambda)$ verdeling met parameter λ. Is die groter, kleiner of gelijk aan de verwachtingswaarde van deze verdeling?

5. De continue stochast X heeft de volgende dichtheid:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

   a) Bereken de verdelinsfunctie van X en teken de plaatjes van de dichtheid en de verdelingsfunctie.
   b) Bereken $P(X \leq 1/2)$.
   c) Bereken de verwachtingswaarde en de mediaan van X.

6. De gezamenlijke verdeling van de discrete stochasten X en Y is gegeven in de volgende (onvolledige) tabel:

Y \ X	0	1	2	3	$P(Y)$
1	0.1	0.1	0.05		
2		0		0.1	
3	0		0.1	0.2	0.4
$P(X)$	0.25		0.25		1

   a) Maak de tabel compleet.
   b) Bereken de verwachtingswaarden en de varianties van X en van Y.
   c) Bereken de covariantie tussen X en Y. Zijn deze stochasten onafhankelijk? Ongecorreleerd?

7. Treinen in de metrostations van Moskou metro komen aan volgens de Poisson proces met intensiteit 1 per minuut (dus het aantal treinen per minuut heeft de Poisson verdeling met parameter 1).
   a) Wat is de kans dat in een minuut precies één trein aankomt? Tenminste één trein aankomt?
   b) Stel nu voor dat wij staan op een station gedurende 10 minuten en wij kijken naar het aantal treinen in de eerste minuut, de tweede minuut, derde minuut enzovoot tot de tiende minuut. Zij X het aantal minuten waarin geen treinen zijn gekomen. Wat zijn de mogelijke waarden van X en wat zijn de bijbehorende kansen? In andere worden, met behulp van welke (bekende) kansverdeling kunnen wij de verdeling van X modelleren? (*Hint:* je mag kiezen uit de Poisson, Exponentiele of Binomiale verdeling, maar je moet wel de juiste parameter(s) aangeven).

8. Zij Y een stochast met Normale (5,4) verdeling. Bereken $P(4.2 \leq Y \leq 5.8)$.

tussen toets 1 Feb 2006 Kanstat

1) $P(A) = 1/2$

$P(A|B) = 2/3$

$P(A|B^c) = 3/7$

$P(B) = ?$

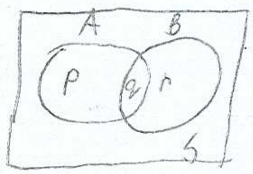
wet van totale waarschijnelijk

$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$

stel $P(B) = x$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{3}x + \frac{3}{7}(1-x) \rightarrow x = \frac{3}{10}$ dus $P(B) = 3/10$

Ook



$p + q = \frac{1}{2}$

$\frac{q}{q+r} = \frac{2}{3}$

$\frac{p}{p+s} = \frac{3}{7}$ etc

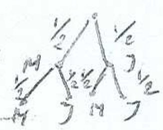
$p + q + r + s = 1$

2) MM ← 1/3 dus $\frac{1}{3}$

JM

MJ

~~JJ~~ ← valt af aan de hand van de gegevens



M is * meisje

$P(M=2 \mid M \geq 1) = \frac{P(M=2, M \geq 1)}{P(M \geq 1)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$

3) B: je bent besmet

T: de test zegt 'besmet'

$P(B) = 0{,}001 \rightarrow P(B^c) = 0{,}999$

$P(T|B) = 0{,}99$

$P(T^c|B^c) = 0{,}99 \rightarrow P(T|B^c) = 0{,}01$

a) $P(B|T) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|B) \cdot P(B)}{P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)}$

$= \frac{0{,}99 \cdot 0{,}001}{0{,}99 \cdot 0{,}001 + 0{,}01 \cdot 0{,}999} = \frac{0{,}00099}{0{,}00099 + 0{,}00999} = \frac{0{,}00099}{0{,}01098} = 0{,}090164$

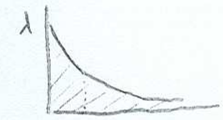
b $P(T) = 0{,}01098$ want $P(T) = P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)$

↑ uit 3a

(2)

4 $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$

kansdichtheid $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$



distributie functie $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$

Voor de Mediaan m geldt

$F(m) = \frac{1}{2} \rightarrow 1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\lambda m} = \frac{1}{2}$

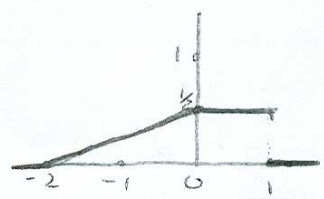
$-\lambda m = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow -\lambda m = -\ln 2 \Rightarrow m = \frac{\ln 2}{\lambda}$

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = 1/\lambda$

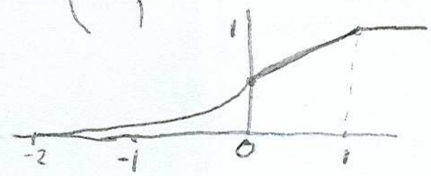
$\ln 2 < 1$ want $2 < e$ → dus de mediaan < verwachting

5 X is stochast met dichtheid

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$



a) $F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{als } a < -2 \\ \int_{-2}^{a} f(x)dx = \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} & \text{als } -2 \leq a \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \int_{0}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a & \text{als } 0 \leq a \leq 1 \\ 1 & \text{als } a \geq 1 \end{cases}$



b) $P(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

c) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{-2}^{1} x f(x) dx = \int_{-2}^{0} x f(x) dx + \int_{0}^{1} x f(x) dx = -1/12$

de mediaan van X is 0, want $F(0) = -\frac{1}{2}$

		X			
6a) Y	0	1	2	3	$P(Y=y)$
1	0,1	0,1	0,05	0	0,25
2	0,15	0	0,1	0,1	0,35
3	0	0,1	0,1	0,2	0,4
$P(X=x)$	0,25	0,2	0,25	0,3	1

b) $E[X] = 0\cdot 0{,}25 + 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}25 + 3\cdot 0{,}3 = 1{,}6$ $\quad E[Y] = 2{,}15$

$E[X^2] = 0^2\cdot 0{,}25 + 1^2\cdot 0{,}2 + 2^2\cdot 0{,}25 + 3^2\cdot 0{,}3 = 3{,}9$ $\quad E[Y^2] = 5{,}25$

$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 3{,}9 - (1{,}6)^2 = 1{,}34$ $\quad Var(Y) = 0{,}6275$

c $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]\cdot E[Y] = 3{,}9 - 1{,}6\cdot 2{,}15 = 0{,}46$

$= E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$

$E[XY] = 0\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}15 + 0\cdot 0 +$
$1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0{,}1 +$
$2\cdot 0{,}05 + 4\cdot 0{,}1 + 6\cdot 0{,}1 +$
$3\cdot 0 + 6\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}2 = 3{,}9$

7) $X \sim pois(\mu)$ m.a.w. $P(X=k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$ $(k = 0,1,\dots)$

a) T is # treinen in één minuut

$\mu = 1$ $\quad T \sim Pois(1) \rightarrow P(T=k) = \frac{1}{e\,k!}$

$P(T=0) = 1/e$ $\quad P(T \geq 1) = 1 - \frac{1}{e}$

b) X is # minuten zonder trein. $\quad X \sim Bin(10, 1/e)$

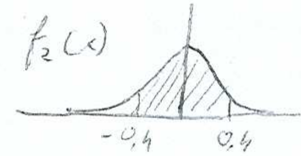
X kan de waarde $0,1,2,\dots,10$

(dus $P(X=k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{e}\right)^k\left(1-\frac{1}{e}\right)^{10-k}$)

8)

$X \sim N(5,4)$

neem $Z = \frac{Y-5}{2}$ dan $Z \sim N(0,1)$



$P(4{,}2 \leq Y \leq 5{,}8) = P(4{,}2 \leq 2Z + 5 \leq 5{,}8) = P(-0{,}8 \leq 2Z \leq 0{,}8) = P(-0{,}4 \leq Z \leq$

$= 1 - 2\cdot 0{,}3446 = 0{,}3108$