DEEL I

(1)

1) 2 dozen, 10 aanst. → 1 defecte
→ 2 defecte

a) P(aanst. werkt) = P(aanst. werkt | 1e doos) . P(1e doos) + P(aanst. werkt | 2e doos) . P(2e doos) =

$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{20}$

b) $P(\text{2e doos} \mid \text{aanst. werkt}) = \frac{P(\text{2e doos \& aanst. werkt})}{P(\text{aanst. werkt})} =$

$= \frac{8/10 \cdot 1/2}{17/20} = \frac{8}{17} =: P_W(\text{2e doos})$, dan

$P_W(\text{1e doos}) = 1 - \frac{8}{17} = \frac{9}{17}$.

c) P(2e aanst. uit dezelfde doos werkt) =

= P(2e aanst. werkt | 1e doos) . P_W(1e doos) + P(2e aanst. werkt | 2e doos) . P_W(2e doos) =

$= \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{17} + \frac{7}{9} \cdot \frac{8}{17} = \frac{128}{156}$

---

2) Als gegeven is dat $P(X=1 \mid Y=0) = 0.4$ dan kunnen wij berekenen:

$P(X=1 \cap Y=0) = P(X=1 \mid Y=0) \cdot P(Y=0) = 0{,}4 \cdot 0.4 =$
$= 0.16$

Y \ X	1	2	3	P(Y)
0	0.16	0.1	0.14	0.4
1	0.3	0.24	0.06	0.6
P(X)	0.46	0.34	0.2	1

Dan $P(X=3 \cap Y=0) =$
$= 0.4 - 0.1 - 0.16 = 0.14$

$P(X=2 \cap Y=1) = P(X=2 \mid Y=1) \cdot$
$\cdot P(Y=1) = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24$

b) $\mathbb{E}X = 0.46 \cdot 1 + 0.34 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 =$

$= 0.46 + 0.68 + 0.6 = 1.74$

$\mathbb{E}Y = 0.6$

c) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

$\mathbb{E}(X \cdot Y) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.24 + 3 \cdot 0.06 =$

$= 0.3 + 0.48 + 0.18 = 0.96$

$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0.96 - 1.74 \cdot 0.6 = \underline{\underline{-0.084}}$

Dus gecorreleerd <u>en</u> afhankelijk.

---

3) $P(\text{goed aantwoord bij één vraag}) = \frac{1}{4}$

a) Totaal 5 vragen. Dus

$X = \text{aantal goede aantwoorden} \sim \underline{\mathrm{Bin}(5, \tfrac{1}{4})}$.

b) $P(\text{minstens 4 goed}) = P(4\text{ goed}) + P(5\text{ goed}) =$

$= \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{64} = 0.0156$

5) $f(x) = \begin{cases} c\,(x+1) , & -1 \le x \le 1 \\ 0 , & \text{elders} \end{cases}$

a) c - ? Wij weten dat moet gelden:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$. In onze geval:

$$\int_{-1}^{1} c\,(x+1)\, dx = c \int_{-1}^{1} (x+1)\, dx = c\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= c\left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 1\right) = 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

b) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ per definitie.

In onze geval: als $x \in [-1, 1]$: $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}(t+1)\, dt =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_{-1}^{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}}}$$

c) $P(-0.5 < X \le 0.5) = F(0.5) - F(-0.5) =$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

d) $\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x \cdot (x+1)\, dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

d) (vervolg) $\mathrm{Var}\, X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(x+1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}\, X = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

6.) $U_1 \sim \mathrm{Un}[0,1]$, $U_2 \sim \mathrm{Un}[-2,2]$,

U_1, U_2 onafhankelijk; $S = 2 + 3U_1 - 2U_2$.

$$\mathbb{E}S = 2 + 3\mathbb{E}U_1 - 2\mathbb{E}U_2 = 2 + 3\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 0 = 3.5$$

$$\mathrm{Var}S = 9\cdot \mathrm{Var}\,U_1 + 4\cdot \mathrm{Var}\,U_2 = \frac{9}{12} + \frac{4\cdot 16}{12} = \underline{\underline{\frac{73}{12}}}$$

$$\mathrm{StDev}S = \sqrt{\mathrm{Var}S} = \underline{\underline{2.466}}$$

---

7) $X_1 \sim N(10,5)$, $X_2 \sim N(-10,5)$, $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = 10$

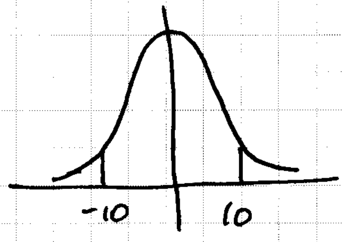
a) $$\rho(X_1,X_2) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sigma_1\cdot\sigma_2} = \frac{10}{5\cdot 5} = \frac{10}{25}$$

b) Verdeling van $Y = X_1 + X_2$ is weer Normaal, $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 = 0$

$$\mathrm{Var}\,Y = \mathrm{Var}\,X_1 + \mathrm{Var}\,X_2 + 2\,\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = 25 + 25 + 20 = 65$$

$$\mathrm{StDev}\,Y = \sqrt{\mathrm{Var}\,Y} = \sqrt{65} = 8.06$$

c) $P(-10 < Y < 10) = 1 - 2 \cdot P(Y > 10)$



$$P(Y > 10) = P\Big(\underbrace{\frac{Y}{StDev(Y)}}_{Z \sim N(0,1)} > \frac{10}{StDev(Y)} \Big) =$$

$$= P(Z > 1{,}24) = 0.1075$$ volgens tabel

$$\Rightarrow P(-10 < Y < 10) = 1 - 2 \cdot 0{,}1075 = \underline{\underline{0{,}785}}$$