Technische Universiteit Delft | Mekelweg 4
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica | 2628 CD Delft

Tussentoets Kansrekening en Statistiek voor Technische Aardwetenschappen, 2 februari 2005, 14:00-15:30

De toets bestaat *alleen* uit *open vragen*. Bij elke vraag staat tussen haakjes hoeveel punten deze vraag waard is. Het maximale mogelijke aantal punten is 29. Je hoeft echter maar 25 punten scoren om het toetscijfer 10 te verdienen, dus je mag zelf beslissen welke vragen je wel of niet doet.
Alle antwoorden moeten zijn voorzien van een (korte) argumentatie, dus laat bij elke vraag zien hoe je aan het antwoord bent gekomen. Een vraag waarbij alleen het antwoord is vermeld, wordt niet goed gerekend. Voor meer duidelijkheid omcirkel de uiteindelijke antwoorden.
Gedurende het tentamen mag een zelfgemaakt uittreksel van hooguit twee A4 gebruikt worden en een rekenmachine.

1. Er wordt twee keer met een eerlijke munt gegooid. Wij beschouwen de volgende gebeurtenissen:
   A = munt bij de eerste worp;
   D = ten minste één munt bij twee worpen;
   E = ten minste één kop bij twee worpen;
   F = munt bij de twede worp.

   Zijn de volgende paren van de gebeurtenissen afhankelijk of onafhankelijk (geef voor elke conclusie de reden!):

   a) (1) A en E;
   b) (1) A en F;
   c) (1) D en E?

2. Er zijn twee vazen, de ene met 3 witte en 4 zwarte ballen en de andere met 2 witte en 3 zwarte ballen. Er wordt een bal uit de eerste vaas getrokken en (zonder te kijken) in de tweede vaas gelegd. Daarna wordt er uit de tweede vaas een bal getrokken.

   a) (2) Wat is de kans dat deze (dus uit de tweede vaas getrokken) bal wit is?

   b) (2) Stel dat deze bal inderdaad wit is. Wat is dan de kans dat de eerste getrokken bal (dus die uit vaas 1) ook wit was?

3. De discrete stochast X heeft de volgende verdeling:

X	-2	2	3	5
p	0.1	0.1	0.3	0.5

   Bereken:

   a) (2) De verdeling van de stochast $Y = X^2 - 4$.

   b) (2) De verwachtingswaarde en de variantie van Y.

4. X en Y zijn normaal $N(2, 1)$-verdeelde stochasten, waarvan ook bekend is dat $E(XY) = 8$. Bepaal

   a) (2) $\mathrm{Cov}(X, Y)$;

   b) (2) $\mathrm{Var}(X + Y)$.

5. X en Y zijn onafhankelijke discrete stochasten, X neemt een waarde $-1, 0$ of 1 ieder met kans $1/3$ en Y heeft Bernoulli verdeling met parameter $1/4$.

   a) (2) Defineer de nieuwe stochasten $Z = XY$ en $T = X + Y$. Bepaal de marginale verdelingen van Z en T.

   Bepaal:
   b) (2) de gezamenlijke verdeling van de stochasten X en Z;

OF (moelijker maar wel meer punten waard!)

b*) (3) de gezamenlijke verdeling van de stochasten Z en T.

6. De continue stochast X heeft de volgende verdelingsfunctie:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

a) (3) Bereken: de kans $P(1/3 < X \leq 2/3)$, de dichtheid $f(x)$ en EX.

b) (2) Bepaal de mediaan van X, dus het 0.5-de kwantiel van de verdeling van X.

c) (2) Stel je kan alleen uniforme-$[0,1]$ stochasten genereren, en noem zo'n trekking U. Hoe zou je hiermee de trekking van de stochast X genereren? Zij $U = 0.38$. Wat is dan de bijbehorende trekking van X?

d) (2) Laat nu 10 onafhankelijke stochasten $X_1, X_2, ..., X_{10}$ allemaal de verdeling $F(x)$ hebben. Noem $M = \max(X_1, ..., X_{10})$ (dus M is de grootste van de 10 stochasten). Wat is de verdelingsfunctie van M?