Technische Universiteit Delft — Mekelweg 4
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica — 2628 CD Delft

Tussentoets Kansrekening en Statistiek voor Technische Aardwetenschappen, 2 februari 2004, 19:00-20:30

Het toets bestaat *alleen* uit *open vragen*. Alle antwoorden moeten zijn voorzien van een (korte) argumentatie, dus laat bij elke vraag zien hoe je aan het antwoord bent gekomen. Een vraag waarbij alleen het antwoord is vermeld, wordt niet goed gerekend. Voor meer duidelijkheid omcirkel de uiteindelijke antwoorden.

Gedurende het tentamen mag een zelfgemaakt uittreksel van hooguit twee A4 gebruikt worden en een rekenmachine.

1. Een laboratoriumtest voor het gebruik van steroiden in atletiek heeft detectiekansen zoals gegeven in onderstaande tabel:

	Test	resultaat
Steroide-gebruik	+	−
Ja	0.9	0.1
Nee	0.01	0.99

   Verder is bekend dat 2% van de atleten steroiden gebruikt.
   a) Bepaal de kans dat een willekeurige atleet een negatief testresultaat heeft.
   b) Wat is de kans dat de atleet steroiden heeft gebruikt als de test positief is?

2. Een club bestaat uit 17 mannen en 13 vrouwen. Er moet een bestuur gekozen worden bestaande uit 5 leden. Stel dat er wordt gelot wie in een bestuur gaat zitten. Wat is de kans dat een bestuur zal bestaan uit 3 mannen en 2 vrouwen?

3. De stochastische variabelen X en Y zijn onafhankelijk en hebben beide de standaard normale verdeling. Definier twee nieuwe stochasten U en V als: $U = X + Y$ en $V = 2X - Y$.
   a) Welke verdelingen hebben de stochasten U en V?
   b) Zijn U en V afhankelijk? Bepaal de covariantie $Cov(U, V)$ en de correlatie $Corr(U, V)$. (*Hint:* merk op dat voor een normaal $N(0, 1)$-verdeelde stochast X geldt: $EX^2 = Var(X) = 1$.)

4. Een experiment heeft een succeskans 0.6. Deze experiment wordt uitgevoerd totdat succes is geboekt, maar niet meer dan 5 keer. Zij stochasten X = het totale aantal uitgevoerde experimenten en Y = het aantal successen.
   a) Bepaal de marginale verdelingen van X en Y en de gezamenlijke verdeling. Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer jouw aantwoord.
   b) Bereken $E(X)$ en $E(Y)$.

5. De continue stochast X heeft de volgende verdelingsfunctie:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

   a) Bereken: de kans $P(1/4 < X \leq 1/2)$, de dichtheid $f(x)$, EX en $\mathrm{Var}(2X)$.
   b) Welke (bekende) verdeling heeft de stochast $Y = X^2$?

6. Zij X en Y onafhankelijke stochasten, X heeft Bernoulli verdeling met parameter p en Y heeft Bernoulli verdeling met parameter q. Defineer nieuwe stochasten $W = \min(X, Y)$ en $Z = \max(X, Y)$.
   a) Bepaal de marginale verdelingen van W en Z en hun gezamenlijke verdeling.
   b) Bepaal de covariantie $Cov(W, Z)$.

7. De gezamenlijke dichtheid van de stochasten X en Y wordt gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{als } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$$

   a) Wat zijn de marginale dichtheden en marginale verdelingsfuncties van X en van Y?
   b) Zijn X en Y onafhankelijk? (motiveer jouw antwoord!)
   c) Bereken EX en $Cov(X, Y)$.

Uitwerkingen Tussentoets wi 1275 2 feb 2004

①

ster gebr	Test res +	−
ja	0,9	0,1
nee	0,01	0,99

2% van alle atleten gebruikt steroiden

Geb $A = \{\text{atleet heeft steroide gebruikt}\}$

$B = \{\text{test resultaat positief}\}$

$P(A) = 0{,}02$

$P(B|A) = 0{,}9$

$P(B|A^c) = 0{,}01$

$P(B^c) = 0{,}1$

$P(B^c|A^c) = 0{,}99$

ⓐ $= P(B^c|\cancel{A}) \cdot P(A) + P(B^c|A^c) \cdot P(A^c) =$

$0{,}1 \cdot 0{,}02 + 0{,}99 \cdot 0{,}98 =$

$\underline{\underline{0{,}9722}}$

ⓑ $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

$P(A|B) = \dfrac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \dfrac{0{,}9 \cdot 0{,}02}{1 - 0{,}9722} = \underline{\underline{0{,}6429}}$

② 17 M 13 V vaasmodel zonder teruglegging

$5 = 3M + 2V = A$

$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{\binom{17}{3}\binom{13}{2}}{\binom{30}{5}} = \underline{\underline{0{,}37}}$

③ X, Y onafhankelijk $X, Y \sim N(0,1)$

$U = X + Y$

$V = 2X - Y$

ⓐ $U, V \sim N$

$EU = E(X+Y) = 0$

$EV = E(2X-Y) = 0$

$\text{Var}\,U = \text{Var}(X+Y) \overset{\text{onaf}}{=} \text{Var}\,X + \text{Var}\,Y = \underline{\underline{2}}$

$\text{Var}\,V = \text{Var}(2X-Y) = 4\,\text{Var}\,X + \text{Var}\,Y = \underline{\underline{5}}$

$\text{Var}(c \cdot Y) = c^2\,\text{Var}\,Y$

$U \sim N(0,2)$

$V \sim N(0,5)$

ⓑ ja ze zijn afhankelijk, want ze hangen allebei van X, Y af

$\text{Cov}(U,V) \overset{\text{def}}{=} E[(U - EU)(V - EV)]$

$= E(UV) - \underbrace{EU \cdot EV}_{0}$

$= E[(X+Y)(2X-Y)]$

$= E[2X^2 - XY + 2XY - Y^2]$

$= \underbrace{E(2X^2)}_{2 \cdot 1} - \underbrace{E(XY)}_{0} + \underbrace{E(2XY)}_{0} - \underbrace{E(Y^2)}_{1}$

$= \underline{\underline{1}}$

$\text{Corr}(U,V) = \dfrac{\text{Cov}(UV)}{\text{std}(U) \cdot \text{std}(V)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

④ $P(\text{succ}) = 0{,}6$ X = aantal exp $\in \{1,2,3,4,5\}$

Y = aantal succ $\in \{0,1\}$

$P(X=1) = 0{,}6$

$P(X=2) = 0{,}4 \cdot 0{,}6$

$P(X=3) = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6$

$P(X=4) = 0{,}4^3 \cdot 0{,}6$

$P(X=5) = 0{,}4^4\, 0{,}6 + 0{,}4^5$

$P(Y=0) = 0{,}4^5$

$P(Y=1) = 1 - 0{,}4^5$

Y \ X	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	$0{,}4^5$
1	0,6	$0{,}4 \cdot 0{,}6$	$0{,}4^2 \cdot 0{,}6$	$0{,}4^3 \cdot 0{,}6$	$0{,}4^4 \cdot 0{,}6$

nee, ze zijn niet onafhankelijk want de een geeft info over de ander.

4b $\mathbb{E}X = 1\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6 + 3\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6$ enz

$\mathbb{E}Y = 0\cdot 0{,}4^5 + 1\cdot(1-0{,}4^5) = \dots$

5a $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

$P(\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2}) \overset{def}{=} F(\frac{1}{2}) - F(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{4})^2$

$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x \text{ elders} \end{cases}$

$\mathbb{E}x \overset{def}{=} \int_0^1 x\, 2x\, dx = \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$Var(2x) = 4 Var x \; ; \; Var X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

$\mathbb{E}X^2 = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx = \int_0^1 2x^3\, dx = \frac{2}{4}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

dus $Var\, 2x = 4(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}) = \frac{2}{9}$

b $P(y \le t) = P(x^2 \le t) = P(x \le \sqrt{t}) = t$

$t \in [0,1] = \text{Uniform}[0,1]$ met $F\sqrt{t}$

---

6 $X \sim Bern(p)$, $Y \sim Bern(q)$

0	1	0	1
$1-p$	p	$1-q$	q

X	Y	W	Z
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$W = \min(x,y) \in \{0,1\}$ $\quad Z = \max(x,y)\, \{0,1\}$

$P(w=1) = pq$ $\quad P(z=0) = 1-p\cdot 1-q$

$P(w=0) = 1-(pq)$ $\quad P(z=1) = 1-(1-p\cdot 1-q)$

6'

w \ z	0	1
0	$(1-p\cdot 1-q)$	$1-pq-(1-p\cdot 1-q)$
1	0	pq

$Cov(wz) = \mathbb{E}(wz) - \mathbb{E}w\cdot \mathbb{E}z$

$\mathbb{E}w = pq$

$\mathbb{E}z = 1-(1-p\cdot 1-q)$

$\mathbb{E}(wz) = pq\cdot 1\cdot 1$

$Cov = pq - ((1-(1-p\cdot 1-q))pq)$

---

7 $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{als } 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$

$f_x(x) = \int_0^1 (x+y)\, dy = \int_0^1 x\, dy + \int_0^1 y\, dy = x + \frac{1}{2}$

$f_y(y) = y + \frac{1}{2}$ (dezelfde berekening)

$F_x(x) = \int_0^x (t+\frac{1}{2})\, dt$

$F_y(y) = \int_0^x (t+\frac{1}{2})\, dt$

7b als X en Y onafhankelijk zijn dan $f(x,y) = f_x(x)\cdot f_y(y)$ wij hebben $f(x,y) = x+y \neq (x+\frac{1}{2})\cdot(y+\frac{1}{2}) = f_x(x)\cdot f_y(y)$

dus X en Y zijn afhankelijk.

7c $\mathbb{E}X = \int_0^1 x f_x(x)\, dx = \int_0^1 x(x+\frac{1}{2})\, dx = \frac{7}{12}$

$\mathbb{E}Y = \frac{7}{12}$ (dezelfde berekening)

$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 (x^2y + xy^2)\, dx\, dy = \frac{1}{3}$

$Cov(XY) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y = \frac{1}{3} - (\frac{7}{12})^2 = \frac{-1}{144}$