

**Tentamen Kansrekening en Statistiek voor Technische Aardwetenschappen,
27 maart 2003, 14.00-17.00**

Het tentamen bestaat uit twee delen. Mensen die tussentoets goed hebben gemaakt (hogere cijfer dan 5), moeten alleen de tweede deel maken, en ze hebben daar anderhalf uur voor. Mensen die tussentoets niet of niet goed hebben gemaakt, of die niet gelukkig zijn met hun toetscijfer, moeten beide delen doen, en ze hebben daar 3 uur voor.

Alle antwoorden moeten zijn voorzien van een (korte) argumentatie, dus laat bij elke vraag zien hoe je aan het antwoord bent gekomen. Een vraag waarbij alleen het antwoord is vermeld, wordt niet goed gerekend. Voor meer duidelijkheid omcirkel de eindelijke antwoorden. Lever delen I en II apart in.

Gedurende het tentamen mag een zelfgemaakt uittreksel van hooguit twee A4 gebruikt worden en een rekenmachine.

Deel II

1. Men beschikt over een dataset die men opvat als een realisatie van onafhankelijke stochasten X_1, \dots, X_n , met dichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-1)}{\theta^2}, & \text{als } 1 < x \leq 1 + \theta \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

waarbij θ onbekend is. Wij nemen voor θ een schatter van de vorm $a\bar{X}_n + b$, waar \bar{X}_n is de gemiddelde en a, b zijn constanten. Voor welke waarden van a, b is deze schatter zuiver?

2. De dataset x_1, x_2, \dots, x_n is afkomstig van n onafhankelijke stochasten X_1, \dots, X_n met dichtheid

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2}, & \text{als } x \geq 0 \\ 0, & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

waarbij θ onbekend is. Bepaal de maximum likelihood schatter voor θ .

3. Men gooit 600 keer met een dobbelsteen. Zij X het aantal keer dat zes naar boven komt.
- a) Als wij aannemen dat de dobbelsteen eerlijk is, wat is de verwachtingswaarde en de variantie van X ?
 - b) Geef een afschatting van de kans dat X meer dan 20 van zijn verwachtingswaarde afwijkt (dus de kans $P(|X - EX| > 20)$) met behulp van de Chebyshev's ongelijkheid.
 - c) Geef een afschatting van dezelfde kans met behulp van de Centrale Limietstelling.
4. Bij 600 worpen met een dobbelsteen vinden wij dat 123 keer zes is gegooid. Dus men vermoedt dat met de dobbelsteen geknoeid is om de kans p op zes te verhogen. Wij willen toetsen

$$H_0 : p = \frac{1}{6} \quad \text{tegen} \quad H_1 : p > \frac{1}{6}$$

bij significantieniveau $\alpha = 0.05$.

- a) Wat is de toetsingsgrootheid T ? Bepaal zijn waarde op grond van de data en geef de kritieke waarden en het kritieke gebied van deze toets.
- b) Wordt de nulhypothese verworpen of niet? Waarom?
- c) Geef het 95% betrouwbaarheidsinterval voor p op grond van de onze experiment.

Deel I

1. Een laboratorium experiment wordt elke dag herhaald totdat het succesvol is, en in iedere experiment is de succeskans p . De eerste experiment wordt uitgevoerd op maandag.
 - a) Wat is de kans dat wij tot en met zondag bezig zijn (d.w.z. dat de eerste succes op zondag is)?
 - b) Stel dat wij niet tot de eerste succes wachten maar gewoon de hele week (dus tot en met zondag) elke dag een experiment uitvoeren. Wat is de kans dat wij precies twee succesvolle experimenten krijgen?
2. Bij het gooien van twee dobbelstenen definiëren we drie gebeurtenissen:
 - A : de uitkomst van de eerste worp is hoger dan de uitkomst van de tweede worp;
 - B : de som van de twee uitkomsten is zeven;
 - C : de tweede worp is een vier.
 - a) Bereken $P(A)$.
 - b) Zijn A en B afhankelijk? Zijn B en C ook afhankelijk? Motiveer jouw antwoord.
3. Een student heeft een tentamen 'voor zestig procent geleerd', d.w.z. op zestig procent van de vragen weet hij het antwoord. Een tentamen bestaat uit vierkeuzevragen en als de student het goede antwoord niet weet, dan gokt hij in 25% van de gevallen het correcte antwoord.
 - a) Hoe groot is per vraag de kans dat de student het goede antwoord invult?
 - b) Bereken de kans dat de student het antwoord op een vraag werkelijk wist als hij de vraag goed beantwoord heeft.
4. We beschouwen twee gebeurtenissen A en B . Gegeven is dat $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ en $P(A \cap B) = 0.2$. Wat is $P(A^c \cap B^c)$?
5. De continue stochast X heeft de volgende dichtheid:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x(2-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken:

- a) de verdelingsfunctie $F(x)$,
 - b) de kans $P(1/4 < X \leq 3/4)$,
 - c) de verwachtingswaarde EX en de variantie $\text{Var}(2X)$,
 - d) de verwachtingswaarde van de stochast $Y = \frac{1}{X}$.
6. Bekijk stochasten X en Y met de volgende gezamenlijke verdeling

$p(x, y)$		y			$p_X(x)$
		0	1	2	
x	-1	0.15	0.10	0.10	
	0	0.15	0.05	0.10	
	1	0.10	0.05	0.20	
$p_Y(y)$					

- a) Maak de tabel compleet, d.w.z. vind marginale verdelingen van X en Y .
 - b) Bereken $\text{Cov}(X, Y)$.
7. Gegeven is de stochasten X, Y met gezamenlijke dichtheid

$$f(x) = \begin{cases} cxy, & \text{als } 0 < x \leq 1, \quad 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

- a) Wat is de waarde van c ?
- b) Bepaal de marginale dichtheden van X en Y .

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
0.1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
0.2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
0.3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
0.4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
0.5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
0.6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
0.7	2420	2389	2358	2327	2296	2266	2236	2206	2177	2148
0.8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
0.9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
1.0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
1.1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
1.2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
1.3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
1.4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
1.5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
1.6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
1.7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
1.8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
1.9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
2.0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
2.1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
2.2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
2.3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
2.4	0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
2.5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
2.6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
2.7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
2.8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
2.9	0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
3.0	0013	0013	0013	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
3.1	0010	0009	0009	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007
3.2	0007	0007	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005
3.3	0005	0005	0005	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003
3.4	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002

Tabel 1: *Rechteroverschrijdingskansen* $\mathbf{P}(Z \geq z)$ van de standaard normale verdeling.

$k \backslash \alpha$	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.321	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Tabel 2: Kritieke waarden $t_{k,\alpha}$ van de Student verdeling