Technische Universiteit Delft — Mekelweg 4
Faculteit Informatietechnologie en Systemen — 2628 CD Delft

Herkansing tentamen Kansrekening en Statistiek voor Technische Aardwetenschappen en Geodesie, 19 augustus 2003

Het tentamen bestaat *alleen* **uit** *open vragen*. **Alle antwoorden moeten zijn voorzien van een (korte) argumentatie, dus laat bij elke vraag zien hoe je aan het antwoord bent gekomen. Een vraag waarbij alleen het antwoord is vermeld, wordt niet goed gerekend. Voor meer duidelijkheid omcirkel de uiteindelijke antwoorden.**

Gedurende het tentamen mag een zelfgemaakt uittreksel van hooguit twee A4 gebruikt worden en een rekenmachine.

1. Een vaas bevat a witte, b zwarte en c rode ballen. Er worden drie ballen uitgetrokken (zonder teruglegging). Wat is de kans dat tenminste twee ballen van dezelfde kleur zijn?

2. Een monteur heeft n lampen bij zich, elke lamp heeft kans p om defect te zijn. De monteur zet een willekeurige lamp aan en, als die defect blijkt te zijn, gooit die meteen weg en probeert opnieuw. Als die goed was, dan stopt hij. Zij X het aantal geteste lampen.
a) Bepaal de kansverdeling van X.
b) Bereken de verwachtingswaarde EX.

3. Op een kruising staat een stoplicht die 1 minuut op groen staat en een halve minuut op rood en zo verder. Je komt bij de kruising aan op een willekeurige moment, onafhankelijk van de staat van de stoplicht.
a) Wat is de kans dat je meteen door mag rijen en niet op het groene licht hoeft te wachten?
b) Wat is de kansverdeling en de verwachtingswaarde van de wachttijd (dus de tijd vanaf het aankomst tot het wegrijden)?

4. Een stochast X heeft een continue verdeling met de dichtheid
$$f(x) = \begin{cases} Axe^{-h^2x^2} & \text{als } x > 0, \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$$
Bereken:
a) de constante A,
b) de verdelingsfunctie $F(x)$,
c) de verwachtingswaarde EX en de variantie $VarX$,
d) de kans $P(X \leq \frac{1}{h\sqrt{2}})$.

5. De gezamenlijke verdelingsfunctue van de stochasten X en Y op een gebied ($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$) is gegeven door $F(x, y) = \sin x \cdot \sin y$.
a) Bepaal de gezamenlijke dichtheid.
b) Bepaal de marginale dichtheden.
c) Zijn X en Y ongecorreleerd? Onafhankelijk? Waarom?

6. a) Voor een willekeurige stochast Y, formuleer de Chebyshev's ongelijkheid.
b) Zij X een normaal verdeelde stochast met de verwachtingswaarde 1 en variantie 4. Geef een afschatting van de kans dat X meer dan 1 van zijn verwachtingswaarde afwijkt met behulp van de Chebyshev's ongelijkheid.
c) Bereken de kans in b) exact met behulp van de tabel van standarde normale verdeling.

7. a) Geef de definitie van een zuivere schatter.
b) We hebben een dataset van lengte n afkomstig uit een Uniforme verdeling op een interval $(0, \lambda)$ (λ is onbekend), en wij schatten λ door $c \cdot \bar{X}_n$, waar c een constante is en $\bar{X}_n$ - de gemiddelde van de dataset. Voor welke c is deze schatter zuiver en waarom?

8. Laat $(4, 8, 3, 4, 6)$ een steekproef zijn uit een geometrisch verdeelde X met parameter p (dus $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$). Wat is de loglikelihood van deze steekproef?

9. Men beschikt over een dataset die men opvat als een realisatie van onafhankelijke stochasten $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Men veronderstelt dat elke X_i een continue verdeling heeft met dichtheid

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

waarbij $\theta > 0$ onbekend is (dit is de zogenaamde *Laplace verdeling*).

Bepaal de maximum likelihood schatter voor θ.

10. Voor een (willekeurige) statistische toets met toetsingsgrootheid T, geef de definities van:
a) significantieniveau en fouten van de eerste en de tweede soort;
b) kritieke waarde(n) en kritieke gebied.

11. Stel dat voor een bepaalde statistische toets het kritieke gebied is $(-\infty, -2.495] \cup [0.938, +\infty)$. Voor welke waarden van de toetsingsgrootheid T wordt de nulhypothese verworpen?
a) $T = 0.005$;
b) $T = -1.357$
c) $T = 1000$
d) $T = -2.495$

12. Bij een leugendetectortest wordt een statistische toets uitgevoerd waarbij

$$H_0 : \textit{persoon spreekt de waarheid}$$

getest wordt tegen

$$H_1 : \textit{persoon liegt}$$

met een significantieniveau $\alpha = 0.01$. Een testscore 1 houdt in dat H_0 niet verworpen wordt, een testscore 0 houdt in dat H_0 wel verworpen wordt. Welke van de vier beweringen is juist:

a) 99% van de personen die liegen, krijgen een testscore 0.
b) 99% van de personen met testscore 0, hebben gelogen.
c) 1% van de mensen die liegen, krijgen testscore 1.
d) 1% van de mensen die de waarheid spreken, krijgen testscore 0.