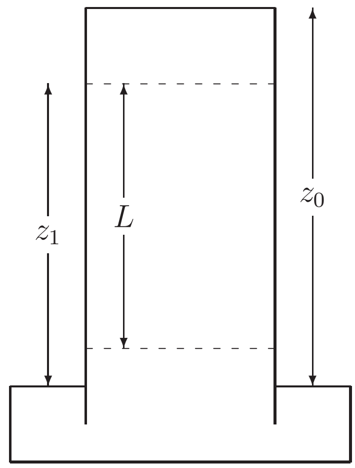
TN4780TU Fysische Transportverschijnselen

Tentamenopgaven hoofdstuk 5

Opgave 1. 27 juni 2008

In een vertikaal opgestelde buis met doorsnede A_0 bevindt zich een fijnkorrelig zandpakket met lengte L. In een stationaire situatie wordt het waterniveau op hoogte z_0, gerekend vanaf de overloop aan de onderzijde, gehouden en bedraagt het waterdebiet door het zandpakket ϕ_{V0}. Er mag worden aangenomen dat $Re_\mathrm{h} \ll 1$. Op een gegeven moment, $t = 0$, stopt de watertoevoer en daalt het waterniveau langzaam tot hoogte z_1.



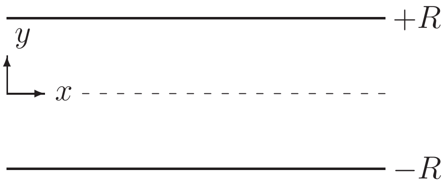
a. Leid een uitdrukking af voor het drukverschil tussen de boven- en onderzijde van het zandpakket, wanneer het waterniveau gelijk is aan z, met $z_1 < z < z_0$.

b. Leid een uitdrukking af voor het volumedebiet door het zandpakket, wanneer het waterniveau gelijk is aan z, met $z_1 < z < z_0$. In deze uitdrukking mogen alleen gegeven grootheden voorkomen.

c. Leid een uitdrukking af voor de tijd t_1 die verstrijkt tot het waterniveau de hoogte z_1 heeft bereikt.

Opgave 2. 27 juni 2008, 26 juni 2009

a. Leid het snelheidsprofiel af voor een laminaire stroming van een newtonse vloeistof met dichtheid ρ en dynamische viscositeit μ tussen twee horizontale vlakke platen op afstand $D = 2\,R$ onder invloed van een constante drukgradiënt $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.



b. Bepaal voor dit geval en wanneer de hydraulische diameter wordt gebruikt in de fanningvergelijking, de constante C_0 in de uitdrukking voor de frictiefactor $4f = C_0/Re_\mathrm{h}$.

Opgave 3. 22 augustus 2008, 16 januari 2009

Een incompressibele vloeistof stroomt turbulent $(4000 < Re < 30000)$ door een gladde ronde horizontale buis.

a. Met welke factor neemt de drukval over de buis toe, wanneer het debiet wordt verdrievoudigd?

b. Hoe zou de diameter van de buis moeten veranderen, wanneer men met verdrievoudiging van het debiet een gelijke drukval wenst?

Opgave 4. 22 augustus 2008

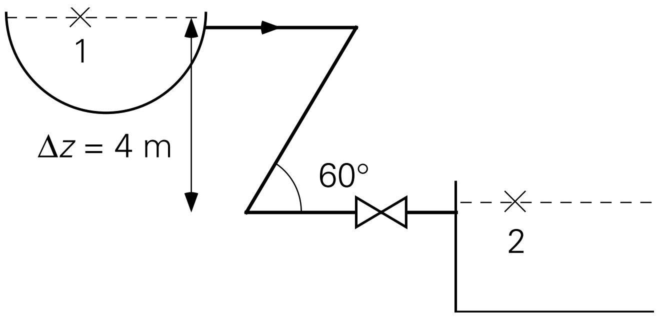
Door een eindige verticale buis stroomt een newtonse vloeistof omhoog. Aan het einde van de buis stroomt dit over de rand en loopt dan aan de buitenzijde van de buis naar beneden. Op enige afstand van de rand wordt de dikte van de naar beneden stromende vloeistoffilm constant. We nemen aan dat deze stroming laminair is en dat de dikte van de film over de gehele omtrek van de buis constant is en dat deze dikte klein is ten opzichte van de buitenstraal van de buis.

a. Leid een vergelijking af voor het snelheidsprofiel in de vloeistoffilm.

b. Hoe luidt het verband tussen dikte van de vloeistoffilm en het debiet?

Opgave 5. 26 juni 2009, 21 augustus 2009

Vanuit een hoger gelegen, groot, open bassin stroomt proceswater door een cilindervormige leiding (lengte $20\,\mathrm{m}$, diameter $10\,\mathrm{cm}$, wandruwheid $1\,\mathrm{mm}$) naar een open kanaal. Het waterniveau in het bassin ligt $4\,\mathrm{m}$ boven dat van het kanaal. De leiding bevat twee scherpe bochten van $60°$ (K_w-factor 1.86) en een schuifafsluiter die voor de helft gesloten is en waarmee het waterdebiet kan worden geregeld. De weerstandsgetallen voor pijpingang en -uitgang zijn 0.2 en 1.0.



a. Geef voor dit probleem de mechanische energiebalans.

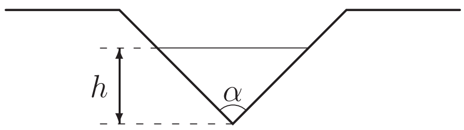
b. Geef voor dit probleem een uitdrukking voor e_fr.

c. Leid nu een uitdrukking af voor de gemiddelde snelheid in de leiding.

d. Bepaal het massadebiet ϕ_m.

Opgave 6. 21 augustus 2009

In een overloop bevindt zich een V-vormige opening. Als het water $h = 30\,\mathrm{cm}$ boven de onderkant van de opening staat, stroomt er $\phi_V = 70\,\mathrm{liter/s}$ door. Hoek $\alpha = 90°$.

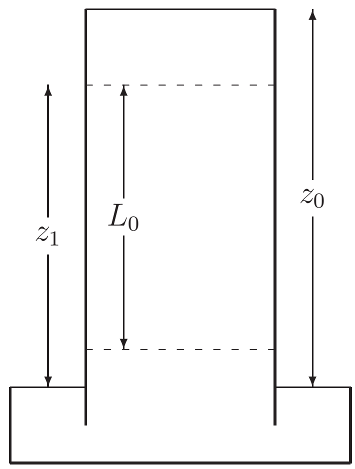


a. Leid uitgaande van de mechanische energiebalans het verband af tussen hoogte $z < h$ en watersnelheid v. Vermeld expliciet welke benaderingen of aannamen u hierbij doet.

b. Bepaal het theoretische verband tussen hoogte h en volumedebiet ϕ_V en bereken daarmee de doorstroomcoëfficiënt C.

Opgave 7. 25 januari 2010

In een vertikaal opgestelde buis met doorsnede A_0 bevindt zich een zandpakket met lengte L_0. In een stationaire situatie wordt het waterniveau op hoogte z_0, gerekend vanaf de overloop aan de onderzijde, gehouden en bedraagt het waterdebiet door het zandpakket ϕ_{V0}. Er mag worden aangenomen dat $Re_\mathrm{h} \ll 1$.



a. Leid voor de gegeven situatie een uitdrukking af voor het drukverschil tussen de boven- en onderzijde van het zandpakket.

b. Leid een uitdrukking af voor het volumedebiet door het zandpakket, wanneer de lengte daarvan L bedraagt en de overige omstandigheden ongewijzigd blijven. Uiteraard blijft $L < z_0$ en is de lengte zodanig, dat dissipatie aan de buiswand nog steeds verwaarloosbaar is.

c. Leid wederom een uitdrukking af voor het volumedebiet door een zandpakket met lengte L, maar nu in de veronderstelling dat $Re_\mathrm{h} > 2000$.

Opgave 8. 28 juni 2010

Een afwateringskanaal heeft een rechthoekige doorsnede met breedte W en een waterdiepte H. Het af te voeren debiet is ϕ_V. De dichtheid ρ en viscositeit μ van water zijn bekend. Het kanaal maakt een hoek α met de horizontaal. Omdat deze hoek klein is, is $\alpha = \sin\alpha = \Delta h/\Delta L$, het doorlopen hoogteverschil per kanaallengte.

a. Geef een uitdrukking voor de hydraulische diameter D_h.

b. Druk het reynoldsgetal Re uit met behulp van ϕ_V, breedte W en hoogte H.

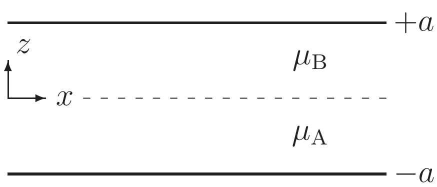
c. Vind met behulp van de mechanische energiebalans een uitdrukking voor $\frac{1}{2} f\, Re^2$.

Neem nu aan dat de relatieve ruwheid $\varepsilon/D_\mathrm{h} = 0.05$, de dichtheid $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, de viscositeit $\mu = 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$ en de versnelling van de zwaartekracht $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$. De waterdiepte is gegeven door $H = \sqrt{W/3}$, waarbij H in meters wordt gevonden, wanneer ook de breedte W in meters wordt ingevoerd.

d. Bereken nu de de afvoercapaciteit van verschillende afvoerkananalen met breedten: $W_1 = 3\,\mathrm{m}$, $W_2 = 30\,\mathrm{m}$ en $W_3 = 300\,\mathrm{m}$ voor het geval $\alpha = 10^{-4}$.

Opgave 9. 28 juni 2010

Twee niet-mengbare newtonse vloeistoffen A en B (viscositeiten μ_A en μ_B, waarbij $\mu_\mathrm{A} > \mu_\mathrm{B}$) stromen stationair tengevolge van een drukgradiënt $\Delta p/L$ laminair tussen twee horizontale, 'oneindig' grote platen (onderlinge afstand $2a$). De beide stromen bewegen zich in lagen boven elkaar (laag B ligt boven op laag A); iedere laag heeft een dikte a.



a. Bereken het schuifspanningsprofiel in beide vloeistoffen. De coördinaat loodrecht op de platen is z; deze heeft de waarde $z = -a$ op de onderste plaat, $z = a$ op de bovenste plaat.

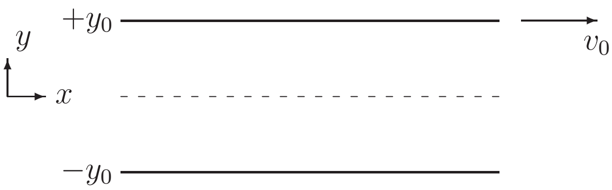
b. Bereken het snelheidsprofiel in beide vloeistoffen. Controleer of de snelheid voor $z = 0$ ongevoelig is voor het verwisselen van A en B.

c. Bewijs dat de volumestroom van A per eenheid van breedte gelijk is aan

$$\phi'_{\mathrm{V,A}} = \frac{a^3}{12\,\mu_\mathrm{A}} \frac{\Delta p}{L} \frac{7\mu_\mathrm{A} + \mu_\mathrm{B}}{\mu_\mathrm{A} + \mu_\mathrm{B}}$$

Opgave 10. 23 augustus 2010

Een newtonse vloeistof (viscositeit μ) stroomt stationair en laminair onder invloed van een constante drukgradiënt in de x-richting tussen twee zeer grote, evenwijdige vlakke platen. De platen bevinden zich op een afstand $2\,y_0$ van elkaar. De onderste plaat staat stil, de bovenste beweegt met een constante snelheid v_0 in de positieve x-richting ($v_0 > 0$).



a. Leid uitdrukkingen af voor de schuifspanning τ_{yx} en voor de snelheid v_x als functie van y. Kies hierbij $y = 0$ halverwege tussen de platen.

b. Schets de profielen van τ_{yx} en v_x voor drie verschillende situaties, namelijk

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} < 0, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} > 0 \text{ en ook } \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

Opgave 11. 23 augustus 2010

Een afwateringskanaal heeft een halfcirkelvormige doorsnede met diameter D. Het af te voeren debiet is ϕ_V. De dichtheid ρ en viscositeit μ van water zijn bekend. Het kanaal is glad en maakt een hoek α met de horizontaal.

a. Hoe groot is hier de hydraulische diameter?

b. Druk het reynoldsgetal Re uit in de hierboven gegeven grootheden.

c. Vind met behulp van de mechanische energiebalans een uitdrukking voor $\frac{1}{2}\,f\,Re^2$.

d. Hoe groot wordt nu de afvoercapaciteit van een afvoerkanaal met een diameter $D = 3\,\mathrm{m}$ voor het geval $\alpha = 10^{-4}$? Neem bij de berekening aan dat $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, $\mu = 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$ en de zwaartekrachtsversnelling $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$.

Opgave 12. 24 januari 2011

Een afwateringskanaal heeft een halfcirkelvormige doorsnede met diameter D. Het af te voeren debiet is ϕ_V. Over de gehele lengte van het kanaal is de halfcirkelvormige doorsnede tot een hoogte $0.375\,D$ met water gevuld. De dichtheid ρ en viscositeit μ van water zijn bekend. Het kanaal is glad en maakt een hoek α met de horizontaal.

a. Bereken, tot op drie decimalen, de hydraulische diameter en controleer of $D_\mathrm{h} \approx 0.8\,D$.

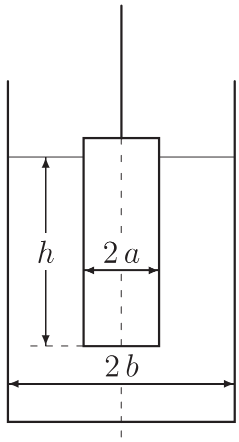
b. Druk het reynoldsgetal Re uit met behulp van het volumedebiet en de bevochtigde omtrek.

c. Vind met behulp van de mechanische energiebalans een uitdrukking voor $\frac{1}{2} f\, Re^2$.

d. Hoe groot wordt nu de afvoercapaciteit van een afvoerkanaal met een diameter $D = 4\,\mathrm{m}$ voor het geval $\alpha = 10^{-4}$? Neem bij de berekening aan dat $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, $\mu = 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$ en de zwaartekrachtsversnelling $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

Opgave 13. 23 augustus 2011

Een rotatieviscosimeter bestaat uit een ronddraaiende bak met diameter $2b$ en hoeksnelheid Ω, waarin concentrisch een trommel met diameter $2a$ is opgehangen aan een torsiedraad. Voor de hoekverdraaiing van torsiedraad geldt: $\alpha = c\,M$, waarin M het uitgeoefende moment en c een constante is. De bak is gevuld met een newtonse vloeistof, welke laminair en stationair stroomt. De trommel bevindt zich over een hoogte h in de vloeistof. In de gebruikelijke cilindercoöridinaten (r, φ, z) zijn $v_r = v_z = 0$ en is v_φ alleen een functie van r. Het effect van de bodem van de trommel kan worden verwaarloosd. Tevens wordt aangenomen dat het vloeistofoppervlak horizontaal blijft.



a. Laat zien dat een momentenbalans voor een stationair draaiende vloeistofring met hoogte h en met een straal tussen r en $r + \mathrm{d}r$ leidt tot de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\mathrm{d}(r^2\,\tau_{r\varphi})}{\mathrm{d}r} = 0$$

b. Leid een differentiaalvergelijking af voor de tangentiële snelheid v_φ, wanneer verder gegeven is dat in cilindercoöridinaten:

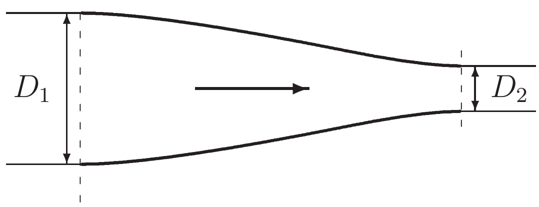
$$\tau_{r\varphi} = -\mu\, r\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right)$$

c. Leid de snelheidsverdeling af en daaruit de schuifspanningverdeling.

d. Leid tenslotte het verband af tussen de hoekverdraaiing α van de torsiedraad en de viscositeit μ van de vloeistof.

Opgave 14. 30 januari 2012

Uit het spuitstuk van een horizontale brandslang (cilindervormig, diameter $D_1 = 10\,\mathrm{cm}$) spuit een waterstraal door een rond gat (met een diameter $D_2 = 4\,\mathrm{cm}$) dat zich aan het einde van het spuitstuk bevindt. De snelheid van het water juist in de spuitopening is $v_2 = 15\,\mathrm{m/s}$. De waterstraal spuit stationair en vrij de buitenlucht in.



Het spuitstuk is gekenmerkt met een op de uitstroomsnelheid betrokken weerstandsgetal $K_{\rm w} = 0.2$. De contractie van de waterstraal net na de uitstroomopening mag buiten beschouwing gelaten worden.

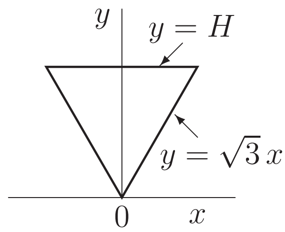
a. Stel een massabalans op voor het volume tussen de doorsneden 1 en 2. Bepaal hieruit de watersnelheid v_1 ter hoogte van doorsnede 1.

b. Stel een mechanische energiebalans op voor het volume tussen de doorsneden 1 en 2. Bepaal hieruit de drukval $p_1 - p_2$.

c. Stel een impulsbalans op in de hoofdstroomrichting voor het volume tussen de doorsneden 1 en 2. Bepaal hieruit de kracht F, in grootte en richting, die het spuitstuk op het water uitoefent.

Opgave 15. 30 januari 2012

De doorsnede van een leiding is gegeven door een gelijkzijdige driehoek met hoogte H. Volgens Bird (opgave 3B.2) wordt het snelheidsprofiel van een laminaire stroming door deze leiding gegeven door:



$$v_z = \frac{1}{4\,\mu}\,\frac{\Delta p}{L}\left(\frac{y}{H} - 1\right)\left(3\,x^2 - y^2\right)$$

Zie voor x en y nevenstaande figuur.

a. Bereken de hydraulische diameter van deze doorsnede.

b. Bereken de maximale snelheid in de doorsnede.

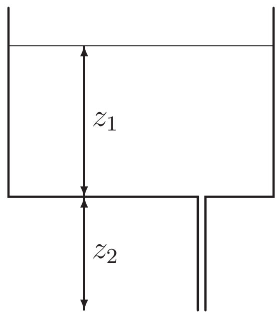
c. Laat zien dat de gemiddelde snelheid in de doorsnede gegeven wordt door

$$\langle v_z \rangle = \frac{H^2}{60\,\mu}\,\frac{\Delta p}{L}$$

d. Bereken C_0 uit $4f = \dfrac{C_0}{Re}$, waarbij Re gebaseerd is op de hydraulische diameter.

Opgave 16. 20 april 2012

Een grote open cilindrische tank met oppervlak A is aanvankelijk tot een hoogte z_1 gevuld met water met constante dichtheid ρ en viscositeit μ. Deze tank loopt leeg door een in de bodem gemonteerde capillair met diameter D en lengte z_2. Er geldt $A \gg D^2$. In het capillair wordt een laminaire stroming verondersteld. De instroomverliezen van het capillair kunnen worden verwaarloosd. Het waterniveau in de tank verandert zo langzaam, dat in de van toepassing zijnde balans een stationaire situatie mag worden aangenomen.



a. 3 punten Leid een symbolische vergelijking af voor de stroomsnelheid van het water in het capillair als functie van de waterhoogte z in het vat: $0 < z < z_1$.

b. 1 punt Bereken de snelheid van het water voor het geval dat het $z = z_1 = z_2 = 0.1\,\mathrm{m}$ en tevens voor het geval het vat bijna leeg is. Neem hierbij $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, $\mu = 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$ en $D = 10^{-3}\,\mathrm{m}$.

c. 1 punt Laat zien dat de aanname van een laminaire stroming reëel is.

d. 1 punt Laat zien in welke richting de uitstroomtijd verandert, wanneer de lengte z_2 van het capillair langer wordt.

Uitwerkingen hoofdstuk 5

Opgave 1.

a. Met Bernoulli vinden we voor de drukken aan boven- en onderijde:

$$p_1 = p_0 + \rho\, g\, (z - z_1) \quad \text{respectievelijk} \quad p_2 = p_0 - \rho\, g\, (z_1 - L)$$

Dan wordt het gevraagde drukverschil:

$$p_1 - p_2 = \rho\, g\, (z - L)$$

b. Een stationaire balans van mechanische energie over het zandpakket geeft:

$$0 = \phi_m \left(g\, L + \frac{p_1 - p_2}{\rho} - e_{\mathrm{fr}} \right)$$

Dit vereenvoudigt tot:

$$e_{\mathrm{fr}} = g\, z$$

Voor $Re \ll 1$ is $e_{\mathrm{fr}} \propto \phi_{_V}/A_0$ de superficiële snelheid. We schrijven daarom:

$$e_{\mathrm{fr}} = C_0\, \frac{\phi_{_V}}{A_0}$$

De evenredigheidsconstante C_0 vinden we uit de gegeven stationaire situatie:

$$C_0 = \frac{g\, z_0\, A_0}{\phi_{_{V0}}} \quad \text{en daarmee} \quad \phi_{_V} = \frac{A_0}{C_0}\, g\, z = \frac{z}{z_0} \phi_{_{V0}}$$

c. De instationaire massabalans wordt nu:

$$A_0\, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\phi_{_V} = -\frac{z}{z_0} \phi_{_{V0}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{\phi_{_{V0}}}{A_0\, z_0}\, \mathrm{d}t$$

Met als oplossing:

$$\frac{z}{z_0} = \exp\left(-\frac{\phi_{_{V0}}\, t}{A_0\, z_0} \right)$$

d. De vergelijking voor de verstreken tijd wordt nu:

$$t_1 = \frac{A_0\, z_0}{\phi_{_{V0}}}\, \ln\left(\frac{z_0}{z_1} \right)$$

Opgave 2.

a. Een krachtenbalans geeft:

$$0 = p_x\, \mathrm{d}y - p_{x+\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}y + \mathrm{d}x\ \tau_{yx}\big|_y - \mathrm{d}x\ \tau_{yx}\big|_{y+\mathrm{d}y}$$

Dat leidt tot:

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\tau_{yx}}{\mathrm{d}y}$$

Met als oplossing

$$\tau_{yx} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\, y + C_1$$

Vanwege symmetrie zullen de vloeistoflaagjes ter weerszijde van $y = 0$ geen netto kracht op elkaar uitoefenen. Dan kan direct gezegd worden dat $C_1 = 0$ en vinden we voor de snelheid:

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,y$$

$$v_x = \frac{1}{2\,\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,y^2 + C_2$$

Omdat $v_x = 0$ voor $y \pm R$ wordt uiteindelijk:

$$v_x = -\frac{1}{2\,\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(R^2 - y^2\right)$$

b. De gemiddelde snelheid wordt dan:

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{R}\int_0^R v_x\,\mathrm{d}r = \frac{R^2}{3\,\mu}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)$$

De hydraulische diameter is hier: $D_\mathrm{h} = 2\,D = 4\,R$.

$$\Delta p = \frac{3\,\mu\,L}{R^2}\langle v_x \rangle = \frac{96\,\mu}{\rho\,\langle v_x \rangle\,D_\mathrm{h}}\frac{L}{D_\mathrm{h}}\frac{1}{2}\rho\,\langle v_x \rangle^2 = \frac{96}{Re_\mathrm{h}}\frac{L}{D_\mathrm{h}}\frac{1}{2}\rho\,\langle v_x \rangle^2$$

Hiermee wordt $4f = \dfrac{96}{Re_\mathrm{h}}$.

Opgave 3.

a. Met de blasiusvergelijking $4f = 0.316\,Re^{-1/4}$ wordt de drukval gegeven door:

$$\Delta p = 0.316\,Re^{-1/4}\,\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho\,\langle v \rangle^2 \propto \left(\frac{\phi_V}{D}\right)^{-1/4}\frac{1}{D}\left(\frac{\phi_V}{D^2}\right)^2 = \frac{{\phi_V}^{1.75}}{D^{4.75}}$$

De drukval neemt toe met een factor $3^{1.75} = 6.84$.

b. Voor een gelijke drukval dient de diameter dan met een factor $3^{1.75/4.75} = 1.50$ toe te nemen.

Opgave 4.

a. Druk hangt niet af van de langscoordinaat x. Krachtenbalans in x-richting op controlevolume geeft dan:

$$0 = \tau_{yx}\big|_y - \tau_{yx}\big|_{y+\mathrm{d}y} + \rho\,g\,\mathrm{d}y$$

$$\tau_{yx} = \rho\,g\,y + C_1 \quad \text{met} \quad \tau_{yx} = 0 \quad \text{voor} \quad y = \delta$$

$$\tau_{yx} = -\rho\,g\,(\delta - y)$$

$$v_x = \frac{\rho\,g}{\mu}\left(\delta\,y - \frac{1}{2}y^2\right)$$

b. Het verband tussen debiet en filmdikte wordt nu

$$\phi_V = \pi\,D\int_0^\delta v_x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi\,D\,\rho\,g\,\delta^3}{3\,\mu}$$

Opgave 5. Dit vraagstuk is uitgewerkt als voorbeeld 5.8 in het boek.

Opgave 6.

a. De mechanische energiebalans gaat over in de vergelijking van Bernoulli, wanneer er geen arbeid is, er geen wrijving is en de dichtheid constant is. De verdere afleiding is gegeven in onderdeel 5.2.1 van het boek, resulterend in:

$$\phi_V = \frac{8}{15} \tan\theta \sqrt{2\,g}\, z_0^{5/2}$$

Met $\theta = \pi/4$ en $z_0 = 0.3\,\mathrm{m}$ wordt gevonden $\phi_V = 0.116\,\mathrm{m^3/s}$

b. Voor de doorstroomcoëfficiënt vinden we dan $C = 0.07/0.116 = 0.6$

Opgave 7.

a. Met Bernoulli vinden we voor de drukken aan boven- en onderijde:

$$p_1 = p_0 + \rho\, g\, (z_0 - z_1) \quad \text{respectievelijk} \quad p_2 = p_0 - \rho\, g\, (z_1 - L_0)$$

Dan wordt het gevraagde drukverschil:

$$p_1 - p_2 = \rho\, g\, (z_0 - L_0)$$

b. In de uitgangssituatie geeft een stationaire balans van mechanische energie over het zandpakket:

$$0 = \phi_m \left(g\, L_0 + \frac{p_1 - p_2}{\rho} - e_{\mathrm{fr}} \right)$$

Dit vereenvoudigt tot:

$$e_{\mathrm{fr}} = g\, z_0$$

Deze dissipatie per kg is constant. Voor $Re \ll 1$ is volgens de theorie $e_{\mathrm{fr}} \propto \phi_V/A_0$ de superficiële snelheid en tevens met de lengte van het zandpakket. We kunnen daarom concluderen:

$$\phi_V\, L = \phi_{V0}\, L_0$$

c. Voor $Re > 2000$ is volgens de theorie $e_{\mathrm{fr}} \propto (\phi_V/A_0)^2$, het kwadraat van de superficiële snelheid en tevens met de lengte van het zandpakket. We kunnen daarom concluderen:

$$\phi_V = \phi_{V0} \sqrt{\frac{L_0}{L}}$$

Opgave 8.

a. Voor een rechthoekig open kanaal is

$$D_{\mathrm{h}} = \frac{4\, W\, H}{W + 2\, H}$$

b.

$$Re = \frac{\rho\, \langle v \rangle\, D_{\mathrm{h}}}{\mu} = \frac{4\, \rho\, \phi_V}{\mu\, (W + 2\, H)}$$

c. In de mechanische energiebalans blijven alleen de termen met potentiële energie en dissipatie over:

$$0 = \rho\,\phi_V\,g\,\Delta z - \rho\,\phi_V\,4\,f\,\frac{\Delta L}{D_\mathrm{h}}\,\frac{1}{2}\,\langle v\rangle^2$$

De snelheid omwerken naar reynoldsgetal resulteert in:

$$\frac{1}{2}\,f\,Re^2 = \frac{\rho^2\,D_\mathrm{h}^3\,g\,\Delta z}{4\,\mu^2\,\Delta L} = \frac{\rho^2\,D_\mathrm{h}^3\,g\,\alpha}{4\,\mu^2}$$

d. Met een berekende waarde voor $\frac{1}{2}\,f\,Re^2$ wordt Re afgelezen in de grafiek (blz. 85 in de 'Data Companion') en daarmee uiteindelijk ϕ_V berekend met

$$\phi_V = Re\,\frac{\mu\,(W + 2\,H)}{4\,\rho}$$

W m	H m	D_h m	$\frac{1}{2}\,f\,Re^2$	Re	ϕ_V $\mathrm{m^3/s}$
3	1	2.40	3.39×10^9	4.5×10^5	0.56
30	3.16	10.45	2.79×10^{11}	5.0×10^6	45.4
300	10	37.5	1.29×10^{13}	3.0×10^7	2.4×10^3

Opgave 9.

a. Met W de breedte in y-richting luidt de krachtenbalans:

$$0 = \tau_{zx}|_z\,L\,W - \tau_{zx}|_{z+\mathrm{d}z}\,L\,W + \Delta p\,W\,\mathrm{d}z \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\tau_{zx}}{\mathrm{d}z} = \frac{\Delta p}{L}$$

Integreren geeft:

$$\tau_{zx} = \frac{\Delta p}{L}\,z + C_0$$

Dit is een lineaire functie, waarvan de integratieconstante C_0 pas bepaald kan worden met de randvoorwaarden van de snelheid.

b. Met voor vloeistof A en B:

$$-\mu_\mathrm{A}\,\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{A}}{\mathrm{d}z} = \frac{\Delta p}{L}\,z + C_0 \quad \text{en} \quad -\mu_\mathrm{B}\,\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{B}}{\mathrm{d}z} = \frac{\Delta p}{L}\,z + C_0$$

vinden we voor de snelheden:

$$v_\mathrm{A} = -\frac{1}{2}\,\frac{\Delta p}{\mu_\mathrm{A}\,L}\,z^2 - \frac{C_0}{\mu_\mathrm{A}}\,z + C_\mathrm{A} \quad \text{en} \quad v_\mathrm{B} = -\frac{1}{2}\,\frac{\Delta p}{\mu_\mathrm{B}\,L}\,z^2 - \frac{C_0}{\mu_\mathrm{A}}\,z + C_\mathrm{B}$$

Voor $z = 0$ zijn beide snelheden aan elkaar gelijk en daarmee $C_\mathrm{A} = C_\mathrm{B}$. De randvoorwaarden op $z \pm a$ geven dan:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}\,\frac{\Delta p}{\mu_\mathrm{A}\,L}\,a^2 + \frac{C_0}{\mu_\mathrm{A}}\,a + C_\mathrm{A} \\ 0 &= -\frac{1}{2}\,\frac{\Delta p}{\mu_\mathrm{B}\,L}\,a^2 - \frac{C_0}{\mu_\mathrm{A}}\,a + C_\mathrm{A} \end{aligned}$$

Dit resulteert in:

$$C_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta p\,a}{L}\,\frac{\mu_\mathrm{B} - \mu_\mathrm{A}}{\mu_\mathrm{B} + \mu_\mathrm{A}} \quad \text{en} \quad C_\mathrm{A} = \frac{\Delta p\,a^2}{L}\,\frac{1}{\mu_\mathrm{B} + \mu_\mathrm{A}}$$

C_A is tevens de snelheid op het scheidingsvlak $z = 0$.

c.

$$\phi'_{\mathrm{V,A}} = \int_{-a}^{0} v_{\mathrm{A}} \, \mathrm{d}z = \frac{a^3}{12\,\mu_{\mathrm{A}}} \frac{\Delta p}{L} \frac{7\mu_{\mathrm{A}} + \mu_{\mathrm{B}}}{\mu_{\mathrm{A}} + \mu_{\mathrm{B}}}$$

Opgave 10.

Voor details van de afleidingen wordt verwezen naar onderdeel 5.6 uit het boek.

a. Een krachtenbalans geeft voor de schuifspanning een lineaire functie in y.

$$\tau_{yx} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\, y + C_1$$

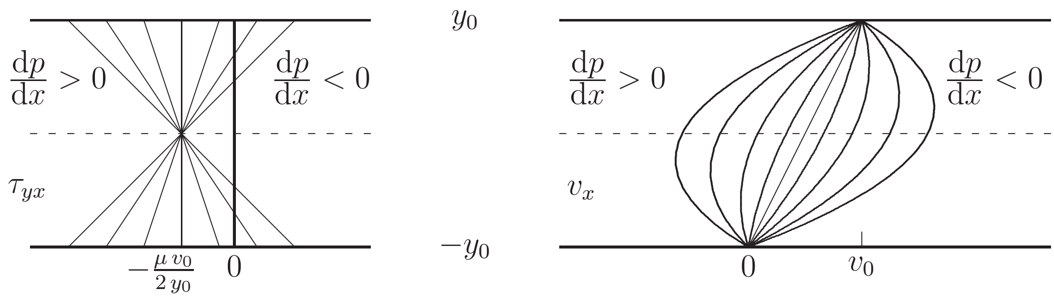
Met $\tau_{yx} = -\mu \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}$ wordt dan:

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \frac{y}{\mu} - \frac{C_1}{\mu} \qquad \Rightarrow \qquad v_x = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \frac{y^2}{2\,\mu} - \frac{C_1}{\mu}\, y + C_2$$

De integratieconstanten C_1 en C_2 volgen uit de randvoorwaarden, hetgeen resulteert in:

$$\tau_{yx} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\, y - \frac{\mu\, v_0}{2\, y_0} \quad \text{en} \quad v_x = -\frac{y_0^2}{2\,\mu} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right) + \frac{v_0}{2} \left(1 + \frac{y}{y_0}\right)$$

b.



Opgave 11.

a. Voor een halfcirkelvormige doorsnede is $D_{\mathrm{h}} = D$

b.

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu} = \frac{8\,\rho\,\phi_{\mathrm{V}}}{\pi\,\mu\, D}$$

c. Met $\alpha = \Delta z / \Delta L$ wordt hier de mechanische energiebalans:

$$0 = \rho\,\phi_{\mathrm{V}}\, g\, \Delta z - \rho\,\phi_{\mathrm{V}}\, 4\, f\, \frac{\Delta L}{D} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2$$

Dit resulteert in:

$$\frac{1}{2}\, f\, Re^2 = \frac{\rho^2\, D^3\, g\, \Delta z}{4\,\mu^2\, \Delta L} = \frac{\rho^2\, D^3\, g\, \alpha}{4\,\mu^2}$$

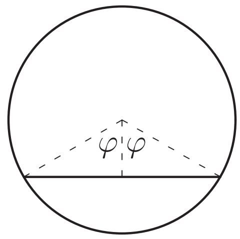
d.

$$\frac{1}{2}\, f\, Re^2 = 6.62 \times 10^9 \qquad \Rightarrow \qquad Re \approx 2.3 \times 10^6$$

$$\phi_{\mathrm{V}} = Re\, \frac{\pi\,\mu\, D}{8\,\rho} = 2.7\, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

Opgave 12.

a. De natte omtrek is gelijk aan:



$$S = 2\,\varphi\,R = \varphi\,D$$

Het oppervlak van het cirkelsegment van de doorsnede vinden we met:

$$A = \varphi\,R^2 - \sin\varphi\,\cos\varphi\,R^2 = R^2\left(\varphi - \frac{\sin(2\,\varphi)}{2}\right)$$

Dit resulteert in:

$$D_{\mathrm{h}} = \frac{4\,A}{S} = R\left(2 - \frac{\sin(2\,\varphi)}{\varphi}\right) = D\left(1 - \frac{\sin(2\,\varphi)}{2\,\varphi}\right)$$

Met de gegeven waterhoogte wordt

$$\varphi = \arccos 0.25 = 1.3181 \quad \text{en} \quad D_{\mathrm{h}} = 0.81636\,D$$

b.

$$Re = \frac{\rho\,\langle v\rangle\,D_{\mathrm{h}}}{\mu} = \frac{\rho\,\phi_V\,D_{\mathrm{h}}}{\mu\,A} = \frac{4\,\rho\,\phi_V}{\mu\,S} = \frac{4\,\rho\,\phi_V}{\mu\,\varphi\,D}$$

c. De mechanische energiebalans:

$$0 = \rho\,\phi_V\,g\,\Delta z - \rho\,\phi_V\,4\,f\,\frac{\Delta L}{D_{\mathrm{h}}}\,\frac{1}{2}\,\langle v\rangle^2$$

geeft met $\alpha = \Delta z/\Delta L$:

$$\frac{1}{2}\,f\,Re^2 = \frac{\rho^2\,D_{\mathrm{h}}^3\,g\,\Delta z}{4\,\mu^2\,\Delta L} = \frac{\rho^2\,D_{\mathrm{h}}^3\,g\,\alpha}{4\,\mu^2}$$

d.

$$\frac{1}{2}\,f\,Re^2 = 8.54\,\times\,10^9 \quad \Rightarrow \quad Re \approx 3.0\,\times\,10^6$$

$$\phi_V = Re\,\frac{\varphi\,\mu\,D}{4\,\rho} = 3.95\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

Opgave 13.

a. Het krachtmoment wordt gevonden door het product van schuifspanning, oppervlak en arm.

$$0 = \tau_{r\varphi}\big|_r\;h\,2\,\pi\,r\,r - \tau_{r\varphi}\big|_{r+\mathrm{d}r}\;h\,2\,\pi\,(r+\mathrm{d}r)\,(r+\mathrm{d}r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(r^2\,\tau_{r\varphi})}{\mathrm{d}r} = 0$$

b.

$$r^2\,\tau_{r\varphi} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right) = -\frac{C_1}{\mu\,r^3}$$

c.
$$\frac{v_\varphi}{r} = \frac{1}{2}\frac{C_1}{\mu}\frac{1}{r^2} + C_2 \quad \Rightarrow \quad v_\varphi = \frac{1}{2}\frac{C_1}{\mu}\frac{1}{r} + C_2\, r$$
Met de randvoorwaarden dat voor $r = b$, $v_\varphi = \Omega\, b$ en voor $r = a$, $v_\varphi = 0$ wordt gevonden:
$$C_1 = \frac{2\,\Omega\,\mu\,a^2\,b^2}{a^2 - b^2} \quad \text{en} \quad C_2 = -\frac{\Omega\,b^2}{a^2 - b^2} \quad \text{zodat}$$
$$v_\varphi = \frac{\Omega\,b^2}{a^2 - b^2}\left(\frac{a^2}{r} - r\right) \quad \text{en} \quad \tau_{r\varphi} = \frac{C_1}{r^2} = \frac{2\,\Omega\,\mu\,a^2\,b^2}{a^2 - b^2}\,\frac{1}{r^2}$$

d.
$$\tau_{r\varphi}\big|_{r=a} = \frac{2\,\Omega\,\mu\,b^2}{a^2 - b^2}$$
Het door de vloeistof op de trommel uitgeoefende moment wordt dan:
$$M = -\,\tau_{r\varphi}\big|_{r=a}\; 2\,\pi\,a^2\,h = \frac{\alpha}{c} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\alpha}{4\,\pi\,\Omega\,h\,c}\,\frac{b^2 - a^2}{a^2\,b^2}$$

Opgave 14.

a. Een massabalans geeft
$$0 = \rho\,v_1\,A_1 - \rho\,v_2\,A_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{A_2}{A_1}\,v_2 = 2.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b. De dissipatie wordt gevonden met:
$$e_{\mathrm{fr}} = K_{\mathrm{w}}\,\frac{1}{2}\,\langle v_2\rangle^2$$
Met de mechanische energiebalans vinden we dan:
$$0 = \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}\,\left(v_1^2 - v_2^2\right) - e_{\mathrm{fr}}$$
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\,\rho\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,\rho\,v_1^2 + \rho\,e_{\mathrm{fr}} = 1.32\,\times\,10^5\,\mathrm{Pa}$$

c. De impulsbalans in de x-richting luidt:
$$0 = \rho\,v_1^2\,A_1 - \rho\,v_2^2\,A_2 + p_1\,A_1 - p_2\,A_2 + F_x$$
De kracht van behuizing op water is dan $F_x = -1460\,\mathrm{N}$, dat wil zeggen tegen de stromingsrichting in.

Opgave 15.

a. De basis van de driehoek is gelijk aan $2\,H/\sqrt{3}$. Dan wordt de omtrek $S = 2\sqrt{3}\,H$ en de doorsnede $A = H^2/\sqrt{3}$.
$$D_{\mathrm{h}} = \frac{4\,A}{S} = \frac{2}{3}\,H$$
De hydraulische diameter is dus gelijk aan de diameter van de ingeschreven cirkel.

b. De maximale snelheid wordt bereikt in het zwaartepunt van de doorsnede: $(0, \frac{2}{3}\,H)$.
$$v_{z,\max} = \frac{H^2}{27\,\mu}\,\frac{\Delta p}{L}$$

c. De vergelijking van de rechter schuine zijde van de driehoek luidt: $y = \sqrt{3}\,x$. De gemiddelde snelheid kan nu worden gevonden met:

$$\langle v_z \rangle = \frac{2}{A} \int_0^H \int_0^{y/\sqrt{3}} v_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{2\,A\,\mu} \frac{\Delta p}{L} \int_0^H \left(\frac{y}{H} - 1 \right) \frac{y^3}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \mathrm{d}y = \frac{H^2}{60\,\mu} \frac{\Delta p}{L}$$

d. Met de drukvalvergelijking van Fanning:

$$\frac{\Delta p}{L} = 4f \, \frac{1}{D_\mathrm{h}} \, \frac{1}{2} \, \rho \, \langle v_z \rangle^2$$

vinden we:

$$4f = \frac{60\,\mu}{H^2} \langle v_z \rangle \, D_\mathrm{h} \, \frac{2}{\rho \, \langle v_z \rangle^2} = \frac{160}{3\,Re}$$

Daarmee is $C_0 = \dfrac{160}{3} = 53.33$

Opgave 16.

a. Toepassing van Bernoulli tussen het wateroppervlak in de tank (1), een punt op bodemhoogte in het capillair (2) geeft met hoogte gerekend vanaf de bodem:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g\,z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

Toepassing van de mechanische energiebalans tussen het punt (2) en punt (3) aan het uiteinde van het capillair geeft:

$$0 = \phi_m \left(\frac{p_2 - p_3}{\rho} + g\,z_2 \right) - \phi_m \, e_\mathrm{fr}$$

Er geldt: $p_1 = p_0$, $p_3 = p_0$, $v_1 = 0$ en $v_2 = v_3 = v$. Bovendien is voor de laminaire stroming in het capillair:

$$e_\mathrm{fr} = 4f \, \frac{z_2}{D} \, \frac{1}{2} \, v^2 = \frac{32\,\mu\,z_2\,v}{\rho\,D^2}$$

We vinden dan:

$$\frac{p_0}{\rho} + g\,z = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

$$0 = \frac{p_2 - p_0}{\rho} + g\,z_2 - \frac{32\,\mu\,z_2\,v}{\rho\,D^2}$$

Elimineren van de onbekende p_2 geeft dan als vergelijking voor v:

$$v^2 + \frac{64\,\mu\,z_2\,v}{\rho\,D^2} - 2\,g\,(z_2 + z) = 0$$

b. Invullen van de gegeven parameters geeft dan eerst:

$$v^2 + 64\,z_2\,v - 19.62\,(z_2 + z) = 0$$

Vervolgens met $z_2 = z = 0.1\,\mathrm{m}$:

$$v^2 + 6.4\,v - 3.924 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.56\,\mathrm{m/s}.$$

en voor wanneer het vat bijna leeg is ($z = 0$):

$$v^2 + 6.4\,v - 1.962 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.33\,\mathrm{m/s}.$$

c.

$$Re = \frac{\rho\, v\, D}{\mu} = 560 \quad \text{respectievelijk} \quad 330$$

en daarmee is de stroming nog laminair.

d. Met $z_2 = 0.2\,\mathrm{m}$ en $z = 0.1\,\mathrm{m}$:

$$v^2 + 12.8\, v - 5.886 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.44\,\mathrm{m/s}.$$

Bij een langer capillair neemt de uitstroomsnelheid af en dus de benodigde tijd voor het leeglopen toe.