TN4780TU Fysische Transportverschijnselen

Tentamenopgaven hoofdstuk 4

Opgave 1. 27 juni 2008

Op de bodem van een goed geroerd cilindrisch vat met diameter $D = 1\,\mathrm{m}$ en hoogte $H = 1\,\mathrm{m}$ bevindt zich een laag met dikte $d = 1\,\mathrm{cm}$ van een vaste stof. Teneinde deze laag te verwijderen wordt het vat gevuld met een vloeistof waarin de vaste stof oplost. Eenmaal in oplossing 'verdwijnt' de vaste stof door een eerste orde chemische reactie. Er mag worden aangenomen, dat de stofoverdracht van vaste stof naar oplossing zo snel en over zo'n korte afstand gebeurt, dat bij dat overdrachtsproces er nog geen noemenswaardige chemische reactie plaatsvindt. Er stelt zich een situatie in, waarbij er evenveel vaste stof in oplossing gaat als er door chemische reactie verdwijnt.

a. Toon aan dat de gemiddelde concentratie van opgeloste vaste stof in het vat aanzienlijk lager is dan de evenwichtsconcentratie.

b. Hoe lang duurt het voordat de laag vaste stof volledig is opgelost?

c. Met welke factor wordt het proces versneld, wanneer er een katalysator wordt toegevoegd die de reactienelheidsconstante een factor 10 vergroot?

Gegeven: stofoverdrachtscoëfficiënt: $k = 10^{-4}\,\mathrm{m/s}$, oplosbaarheid van vaste stof in oplosmiddel: $c^* = 50\,\mathrm{kg/m^3}$, dichtheid van de vaste stof: $\rho = 2000\,\mathrm{kg/m^3}$, diffusiecoëfficiënt: $I\!D = 10^{-9}\,\mathrm{m^2/s}$, reactiesnelheidsconstante: $k_\mathrm{r} = 10^{-3}\,\mathrm{s^{-1}}$.

Opgave 2. 22 augustus 2008

Vroeger werden fietsbinnenbanden van latex gemaakt en moest de band ongeveer om de week weer worden opgepompt. De tegenwoordige binnenbanden zijn van butylrubber en hoeven slechts eens per drie maanden te worden opgepompt.

Neem aan dat de band gezien kan worden als een lange cilinder met een constante diameter D, dat de dikte van het rubber constant en gelijk aan d is, dat de begindruk gelijk is aan p_1, dat de buitendruk constant en gelijk aan p_0 is en dat de temperatuur constant en gelijk aan T_0 is. De verdelingscoëfficiënten m en de diffusiecoëfficiënten $I\!D$ van lucht in latex en butylrubber worden bekend verondersteld. Tot slot nemen we aan dat op elk moment het concentratieprofiel in het rubber lineair is.

a. Leid op basis van een massabalans (in molen) een verband af voor de druk in de fietsband als functie van de tijd.

b. Welke conclusie kunt u uit deze oplossing trekken omtrent verhoudingen van verdelingscoëfficiënten en/of diffusiecoëfficiënten in latex en butylrubber?

Opgave 3. 22 augustus 2008, 16 januari 2009

Een marmeren monument is in de loop van enkele eeuwen verzadigd geraakt met zout water. Om het zout uit het materiaal te krijgen worden de onderdelen van het monument in een grote hoeveelheid geroerd zuiver water gelegd. De stofoverdracht van zo'n marmeren onderdeel naar het water wordt geschat op $k_\mathrm{uitw} = 10^{-5}\,\mathrm{m/s}$. De zoutconcentratie in het water blijft verwaarloosbaar klein.

Bij een experiment met een vlakke plaat met een dikte $d = 4\,\mathrm{cm}$ blijkt dat na 10 dagen de gemiddelde zoutconcentratie tot 0.01 van de oorspronkelijke concentratie is gedaald.

a. Maak een schatting voor de diffusiecoëfficiënt $\mathbb{D}$ en toon daarmee aan, dat voor lange tijden de weerstand tegen stofoverdracht voornamelijk in het marmer zit.

b. Hoe lang moet een cilindervormige marmeren zuil met een diameter $D = 18\,\mathrm{cm}$ in het water liggen om eenzelfde gemiddelde reductie in zoutconcentratie te verkrijgen?

c. Geef de maximale zoutconcentratie in plaat en cilinder wanneer de gemiddelde zoutconcentratie op 0.01 van de oorspronkelijke concentratie is gekomen.

Veronderstel in de berekeningen dat de plaat oneindig uitgestrekt en de cilinder oneindig lang is.

Opgave 4. 26 juni 2009

Een vat met een doorsnede A $[\mathrm{m}^2]$ en een hoogte H $[\mathrm{m}]$ is voor de helft gevuld met water. Boven het water bevindt zich zuiver CO_2, dat door het water geabsorbeerd wordt.

De druk van de CO_2 boven het wateroppervlak wordt door toevoer van buitenaf constant gehouden. Het water wordt voorzichtig en zodanig geroerd dat geen golving van het vloeistofoppervlak optreedt, maar wel een toestand van ideale menging ontstaat.

Het water wordt continu ververst met een stroom $\phi_V\,[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$. Dit water bevat geen CO_2. De CO_2-concentratie in de gasfase is $c_\mathrm{g}\,[\mathrm{mol/m}^3]$, die in de waterfase $c_\mathrm{w}\,[\mathrm{mol/m}^3]$. De verdelingscoëfficiënt m is gedefinieerd als:

$$m = \left(\frac{c_\mathrm{g}}{c_\mathrm{w}}\right)_\mathrm{evenwicht}$$

a. Toon aan dat de verandering van de concentratie c_w in het water wordt beschreven door:

$$\frac{A\,H}{2}\,\frac{\mathrm{d}c_\mathrm{w}}{\mathrm{d}t} = -\left(\phi_V + k\,A\right)\,c_\mathrm{w} + k\,A\,\frac{c_\mathrm{g}}{m}$$

b. Geef voor lange tijd, wanneer de concentratie in het water niet meer verandert, een uitdrukking voor de concentratie c_w.

c. Leid voor de stationaire situatie een uitdrukking af, waaruit de stofoverdrachtscoëfficiënt in de vloeistoffase (k) berekend kan worden.

Opgave 5. 21 augustus 2009

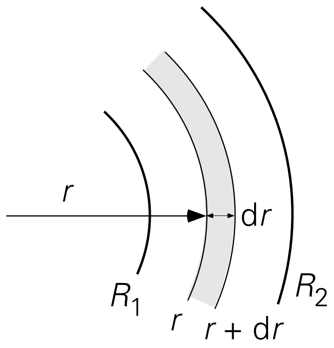
Volgens een fabrikant van vacuumverpakte koffie blijft de inhoud van een pak met $250\,\mathrm{g}$ snelfiltermaling koffie houdbaar tot achttien maanden na productie. De kwaliteit van de koffie gaat uiteindelijke achteruit vanwege de diffusie van de zuurstof uit de omringende lucht door het verpakkingsmateriaal, gevolgd door oxidatie van de verbindingen die voor het aroma zorgen. We veronderstellen, dat de zuurstof die het pak binnendringt zo snel wegreageert, dat de partiële zuurstofdruk in het pak verwaarloosbaar is.

a. Wat verwacht u van de houdbaarheid van een gelijkvormig pak met $500\,\mathrm{g}$ gelijksoortige koffie?

b. Geef een reden waarom vroeger, toen complete in plaats van gemalen koffiebonen werden verkocht, er nog geen noodzaak was de koffiebonen vacuum te verpakken.

Opgave 6. 21 augustus 2009

In een studie naar het zuurstoftransport in menselijk weefsel beschouwde nobelprijswinnaar August Krogh (Denemarken, 1874–1949) een cilindrisch bloedvat met daaromheen een annulus weefsel.



Het metabolisme, de omzetting van zuurstof in kooldioxide, in het weefsel wordt gemodelleerd met een nulde orde reactie gegeven door k_r. Transport in het weefsel vindt plaats door diffusie met diffusiecoëfficiënt $I\!D$. Op $r = R_1$ wordt een zuurstofconcentratie $c = c_0$ aangenomen, op $r = R_2$ wordt aangenomen dat er geen zuurstoftransport is, ofwel $\dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r} = 0$. Er wordt aangenomen, dat zich een stationaire situatie heeft ingesteld.

a. Leid uit een massabalans over een cilinderschil met dikte $\mathrm{d}r$ een differentiaalvergelijking af voor de zuurstofconcentratie tussen R_1 en R_2.

b. Leid een vergelijking af voor het concentratieverloop in het weefsel als functie van r.

c. Leid een uitdrukking af voor de zuurstofstroom die per axiale lengte-eenheid het weefsel ingaat.

Opgave 7. 25 januari 2010, 23 augustus 2010

Aan de binnenkant van een buis, die gebruikt wordt voor het transport van pekel is in de loop van de tijd een laag zout met een dikte $\delta = 2\,\mathrm{mm}$ vastgekoekt. De dichtheid van het zout bedraagt $\rho_\mathrm{z} = 2500\,\mathrm{kg/m^3}$. Besloten wordt deze laag te verwijderen door de buis door te spoelen met gedestilleerd water onder dezelfde stromingscondities als welke heersen bij het pekeltransport. De oplosbaarheid van het zout in het gedestilleerd water is $c^* = 300\,\mathrm{kg/m^3}$. Er mag worden aangenomen dat zoveel gedestilleerd water wordt gebruikt bij het doorspoelen dat de zoutconcentratie in dit water verwaarloosbaar klein blijft. Bij het pekeltransport is een warmteoverdrachtscoëfficiënt gemeten $h = 10 \times 10^3\,\mathrm{W/m^2\,K}$ en voor het lewisgetal onder deze omstandigheden geldt $Le = 100$. De kromming van de buiswand kan worden verwaarloosd.

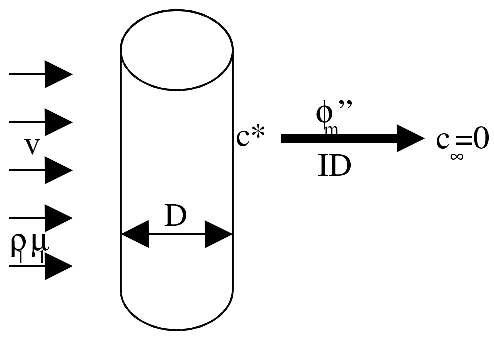
a. Bereken de stofoverdrachtscoëfficiënt aan de buiswand.

b. Leid een vergelijking af voor de tijd die nodig is om al het zout van de buiswand op te lossen en bereken deze tijd.

Opgave 8. 28 juni 2010

Een luchtverfrisser in de vorm van een lange cilinder (lengte $L = 20\,\mathrm{cm}$, diameter $D_0 = 1\,\mathrm{cm}$) wordt op tijdstip $t = 0$ vertikaal opgehangen aan een draadje in een kamer.

De dichtheid van het materiaal X, waaruit de luchtverfrisser bestaat, bedraagt $\rho_\mathrm{X} = 2000\,\mathrm{kg/m^3}$. De molaire massa van dit materiaal is $M_\mathrm{X} = 0.180\,\mathrm{kg/mol}$. De temperatuur van de lucht is $T = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Bij deze condities is de dampspanning van stof X gelijk aan $p_\mathrm{v,X} = 90\,\mathrm{Pa}$. De diffusiecoëfficiënt van X in lucht is $I\!D = 5 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$. In de kamer tocht het zachtjes, waardoor het Sherwoodgetal (gedefinieerd met de diameter van de verfrisser) gelijk is aan $Sh = 1.7$. De concentratie X in de lucht blijft verwaarloosbaar klein.



a. Hoe groot is op $t = 0$ de massastroom van de cilindrische luchtverfrisser naar de lucht?

Bij vraag b en c mag worden aangenomen dat het Sherwoodgetal constant blijft: $Sh = 1.7$.

b. Geef een uitdrukking voor de diameter D van de luchtverfrisser als functie van de tijd.

c. Hoe groot is de afname van de diameter na precies één dag?

Opgave 9. 28 juni 2010

Een biologisch afvalverwerkingssysteem werkt volgens het principe van aerobe vergisting. Bacteriën die verspreid aanwezig zijn in het organische materiaal gebruiken zuurstof uit de atmosfeer voor het omzettingsproces.

Beschouw een vlakke laag organisch materiaal met dikte L dat op een betonnen bodem ligt. De bovenkant van de laag op $x = 0$ heeft contact met de omgevingslucht en daardoor heerst aan de bovenkant van de laag een vaste molaire zuurstofconcentratie gelijk aan $c_{A,0}$. De diffusiecoëfficiënt van zuurstof in het organische materiaal is gelijk aan $I\!\!D$. Het zuurstofverbruik van de bacteriën is evenredig met de lokale zuurstofconcentratie en is gelijk aan $k_1\, c_A$.

a. Leid voor de stationaire situatie met behulp van de massabalans de differentiaalvergelijking af voor de lokale zuurstofconcentratie in de laag afval. Geef ook de randvoorwaarden op $x = 0$ en $x = L$.

b. Leid een vergelijking af voor de lokale zuurstofconcentratie in de stationaire situatie.

Opgave 10. 23 augustus 2010

Om een kleine hoeveelheid water met zuurstof te verzadigen, wordt het in contact gebracht met een grote hoeveelheid lucht. Als het water verzadigd is, blijkt de zuurstofconcentratie in het water $8\,\mathrm{mg/liter}$ te zijn.

De condities van de lucht zijn: druk: $1\,\mathrm{bar}$, temperatuur: $20\,°\mathrm{C}$, dichtheid: $1.2\,\mathrm{kg/m^3}$; 20 gewichts-$\%$ zuurstof.
De watertemperatuur is $20\,°\mathrm{C}$.

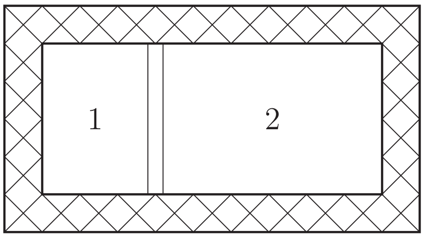
a. Bereken de verdelingscoëfficiënt (m) van de zuurstof.

Het water, dat nu $8\,\mathrm{mg/l}$ zuurstof bevat, wordt vervolgens in contact gebracht met een grote hoeveelheid lucht met een druk van $0.5\,\mathrm{bar}$. Deze lucht heeft een temperatuur van $20\,°\mathrm{C}$ en bevat 20 gewichts-$\%$ zuurstof. De watertemperatuur blijft $20\,°\mathrm{C}$.

b.
1. Beredeneer in welke richting zuurstofoverdracht zal gaan plaatsvinden.
2. Schets het concentratieverloop van de zuurstof aan beide zijden van het grensvlak.
3. Wat is gedurende dit stofoverdrachtsproces de verhouding van de zuurstofconcentraties (in het water en in de lucht) aan het grensvlak?
4. Wat is de zuurstofconcentratie in het water na zeer lange tijd?

Opgave 11. 24 januari 2011

Een volume V met impermeabele buitenwanden is door een polyurethaanfolie verdeeld in de volumina $V_1 = 1\,\mathrm{cm}^3$ en $V_2 = 2\,\mathrm{cm}^3$.



Aanvankelijk bevindt zich in V_1 geen CO_2-gas en in volume V_2 CO_2-gas met een druk $p_{20} = 0.2\,\mathrm{bar}$. Dit CO_2 kan door de folie naar volume V_1 diffunderen.

De dikte van de folie $d = 1\,\mu\mathrm{m}$ en het folie-oppervlak $A = 1\,\mathrm{cm}^2$. Het geheel bevindt zich op temperatuur $T_0 = 295\,\mathrm{K}$. In de evenwichtssituatie is de molaire concentratie van CO_2 in het polyurethaan een factor $m = 2.5$ hoger dan in het aangrenzende gas. De diffusiecoëfficiënt van CO_2 in polyurethaan is hier $D\!\!\!D = 5 \times 10^{-14}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. De hoeveelheid CO_2 opgelost in het membraan mag worden verwaarloosd. Ook mag worden aangenomen dat de weerstand voor stoftransport volledig bepaald wordt door de stofoverdrachtsweerstand van de polyurethaan-folie en dat het concentratieprofiel in het membraan lineair is.

a. Aan het eind van het diffusieproces is de druk in beide volumina even groot. Geef met behulp van de ideale gaswet een berekening voor deze einddruk p_e.

b. Leid uit het constant blijven van de totale hoeveelheid CO_2 een eenvoudig verband af tussen de drukken p_1 en p_2 tijdens het diffusieproces.

c. Geef de instationaire massabalans voor de hoeveelheid CO_2 in volume V_1 en leid daaruit een differentiaalvergelijking voor p_1 af waarin p_2 niet meer voorkomt.

Opgave 12. 15 april 2011

Op een metalen bol (diameter $D = 0.5\,\mathrm{m}$) heeft zich een laag zout (dichtheid $\rho_z = 2000\,\mathrm{kg/m^3}$, molmassa $M_z = 0.3\,\mathrm{kg/mol}$) afgezet met laagdikte $\delta_0 = 0.003\,\mathrm{m}$. Om deze laag te verwijderen, plaatst men de bol in gedestilleerd water ($T = 20\,°\mathrm{C}$) dat stroomt met een snelheid $v = 0.02\,\mathrm{m/s}$. De oplosbaarheid van het zout in water bedraagt $C^* = 1000\,\mathrm{mol/m^3}$. Er wordt zoveel water gebruikt, dat de zoutconcentratie in het water verwaarloosbaar blijft. De diffusiecoëfficiënt van het zout in water bedraagt $D\!\!\!D = 3 \times 10^{-9}\,\mathrm{m^2/s}$. Bij de gegeven stromingscondities is de warmteoverdrachtscoëfficiënt van bol naar water $156\,\mathrm{W/m^2\,K}$. Zie figuur.

a. Toon m.b.v. de Chilton-Colburn relatie, dat is de analogie tussen warmte-overdracht en stofoverdracht, aan dat de stofoverdrachtscoëfficiënt van de bol naar het water gelijk is aan $k = 2.8 \times 10^{-6}\,\mathrm{m/s}$.

b. Laat zien, dat de gevonden waarde voor k overeenkomt met wat verwacht wordt op basis van de bekende relaties voor stofoverdracht naar een bol.

c. Geef een differentiaalvergelijking voor de laagdikte δ als functie van de tijd.

d. Bereken hoe lang het duurt voordat de zoutlaag is opgelost.

Opgave 13. 4 april 2012

In een pekeltransportleiding met diameter $D = 0.2\,\mathrm{m}$ heeft zich in de loop van de tijd op de wand een dun laagje zout afgezet. Om deze laag te verwijderen, laat men gedestilleerd water met een temperatuur $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$ door de buis stromen. Bij deze temperatuur bedraagt de oplosbaarheid van het zout $c_0 = 300\,\mathrm{kg/m^3}$ en is de diffusiecoëfficiënt van het zout in het water gelijk aan $D\!\!\!D = 10^{-9}\,\mathrm{m^2/s}$. De lengte van de buis is $L = 100\,\mathrm{m}$ en in de buis mag een ingestelde laminaire stroming worden verondersteld met $Re = 1000$.

a. 1 punt Welk dimensieloos kental neemt bij stoftransport de rol van het prandtlgetal over en bereken dat getal. (Gebruik de 'Data Companion'.)

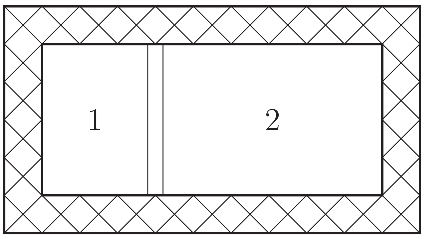
b. 1 punt Geef een uitdrukking voor het gemiddelde Sherwood-getal $\langle Sh \rangle$ als functie van het Reynolds-getal Re, de lengteverhouding D/L en het bij onderdeel a. berekende dimensieloze kental en bereken dit Sherwood-getal.

c. 2 punten Geef middels een massabalans over de totale lengte een schatting voor de dimensieloze gemiddelde zoutconcentratie $\langle c \rangle / c_0$ in het water aan het uiteinde, ook in dit geval weer als functie van het Reynolds-getal Re, de lengteverhouding D/L en het bij onderdeel a. berekende dimensieloze kental en bereken $\langle c \rangle / c_0$. Neem daarbij aan, dat de gehele buiswand nog met zout bedekt blijft en dat de concentratie in het midden van de buis nog nihil is.

d. 3 punten Geef de microbalans voor een klein plakje $\mathrm{d}x$ en leid daaruit door integratie een uitdrukking af voor de dimensieloze gemiddelde zoutconcentratie $\langle c \rangle / c_0$ aan het einde van de buis. Vergelijk die uitdrukking, zowel de vorm als de uitkomst, met het bij c. afgeleide resultaat.

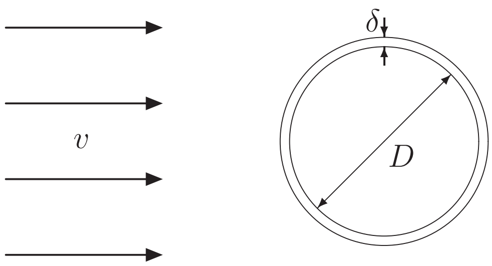
Opgave 14. 27 juni 2012

Een volume V met impermeabele buitenwanden is door een polyurethaanfolie verdeeld in de volumina V_1 en V_2.



Aanvankelijk bevindt zich in V_1 geen CO_2-gas en in volume V_2 CO_2-gas met een begindruk p_{20}. Dit CO_2 kan door de folie naar volume V_1 diffunderen.

De folie heeft dikte d en oppervlak A. Het geheel bevindt zich op een constante temperatuur T_0. In de evenwichtssituatie is de molaire concentratie van CO_2 in het polyurethaan een factor m hoger dan in het aangrenzende gas. De diffusie van CO_2 in het polyurethaan wordt beschreven met een diffusiecoëfficiënt $\mathbb{D}$. De hoeveelheid CO_2 opgelost in het membraan mag worden verwaarloosd. Ook mag worden aangenomen dat de weerstand voor stoftransport volledig bepaald wordt door de stofoverdrachtsweerstand van de polyurethaanfolie en dat het concentratieprofiel in het membraan lineair is.



a. 1 punt Aan het eind van het diffusieproces is de druk in beide volumina even groot. Geef met behulp van de ideale gaswet een vergelijking voor deze einddruk p_e.

b. 1 punt Leid uit het constant blijven van de totale hoeveelheid CO_2 een eenvoudig verband af tussen de drukken p_1 en p_2 tijdens het diffusieproces.

c. 2 punten Geef de instationaire massabalans voor de hoeveelheid CO_2 in volume V_1 en leid daaruit een differentiaalvergelijking voor p_1 af waarin p_2 niet meer voorkomt.

d. 2 punten Laat zien dat

$$\frac{p_1}{p_\mathrm{e}} = 1 - \exp(-k\,t)$$

een oplossing is van de differentiaalvergelijking voor p_1 en tevens voldoet aan de beginvoorwaarde. Bepaal de constante k.

Uitwerkingen hoofdstuk 4

Opgave 1.

a. In de stationaire situatie luidt de massabalans:

$$k\,\frac{\pi}{4}\,D^2\,(c^* - c) = k_\mathrm{r}\,c\,\frac{\pi}{4}\,D^2\,H \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{k}{k + k_\mathrm{r}\,H}\,c^* = 0.0909\,c^*$$

b. Een balans over de vaste stof geeft:

$$\frac{\pi}{4}\,D^2\,\rho\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = k\,\frac{\pi}{4}\,D^2\,(c^* - c)$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\rho}\,(c^* - c) = \frac{10^{-4}}{2000}(1 - 0.0909)\,50 = 2.27\,\times\,10^{-6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Voor het verwijderen van een $1\,\mathrm{cm}$ dikke laag is dan een tijd $t = 0.01/(2.27\,\times\,10^{-6}) = 4400\,\mathrm{s}$ nodig.

c. Wanneer k_r een factor 10 groter is wordt: $c \approx 0.009\,c^*$ en de benodigde tijd $4040\,\mathrm{s}$. Een tien maal sneller reactie geeft dan slechts een 10% verkorting van de oplostijd.

Opgave 2.

a. Met de wet van Fick vinden we voor de molenstroom door een klein stukje van de band met lengte L:

$$\phi_m = \pi\,D\,L\,I\!D\,\frac{c^* - c_0^*}{d} = \pi\,D\,L\,I\!D\,m\,\frac{c - c_0}{d} = \pi\,D\,L\,I\!D\,m\,\frac{p - p_0}{d\,R\,T_0}$$

Met een sterretje * is de concentratie in het rubber weergegeven, zonder sterretje de concentratie van de omringende lucht.

Het aantal molen n in het stukje band is gelijk aan:

$$n = \frac{p\,\pi\,D^2\,L}{4\,R\,T_0}$$

De molenbalans wordt nu:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\phi_m \quad \text{ofwel} \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\,I\!D\,m}{D\,d}\,(p - p_0)$$

Met druk p_1 als beginvoorwaarde vinden we dan:

$$\frac{p - p_0}{p_1 - p_0} = \exp\left(-\frac{4\,I\!D\,m}{D\,d}\,t\right)$$

b. Uit deze oplossing kunnen we uit de verhouding van de tijdsintervallen tussen oppompen concluderen:

$$\frac{t_\mathrm{l}}{t_\mathrm{b}} = \frac{m_\mathrm{b}\,I\!D_\mathrm{b}}{m_\mathrm{l}\,I\!D_\mathrm{l}} = \frac{2}{13} = 0.154$$

Met index l is hier latex aangegeven en met b butylrubber.

Opgave 3.

a. Aflezen van de grafiek met de gemiddelde temperatuur gegeven op blz. 92 van de 'Data Companion' geeft

$$Fo_{\mathrm{plaat}} = \frac{\mathbb{D}\, t}{d^2} = 0.447 \quad \text{resulterend in} \quad \mathbb{D} = 8.28{\times}10^{-10}$$

Uit de analogie met warmteoverdracht volgt:

$$Sh_{\mathrm{inw}} = \frac{k_{\mathrm{inw}}\, d}{\mathbb{D}} = 4.93 \quad \Longrightarrow \quad k_{\mathrm{inw}} \approx 10^{-7} \ll k_{\mathrm{uitw}}$$

De weerstand voor stofoverdracht zit voornamelijk in het marmer. Het gebruik van de doorverwarmings grafieken geeft dan een goede benadering.

b. Voor een cilinder lezen we in dezelfde grafiek af: $Fo_{\mathrm{cil}} = 0.180$. Dit leidt tot:

$$\frac{t_{\mathrm{cil}}}{t_{\mathrm{plaat}}} = \frac{Fo_{\mathrm{cil}}}{Fo_{\mathrm{plaat}}} \frac{D^2}{d^2} = 8.15$$

81.5 dag voor de cilinder.

c. In de grafiek gegeven op blz. 91 van de 'Data Companion' lezen we af voor de maximale concentraties in plaat en cilinder de fracties ca. 0.015 respectievelijk ca. 0.021 van de oorspronkelijke concentratie.

Opgave 4.

a. De $\mathrm{CO_2}$-massabalans voor het water luidt:

$$V \frac{\mathrm{d}c_{\mathrm{w}}}{\mathrm{d}t} = (0 - c_{\mathrm{w}})\ \phi_V + k\, A\ (c_{\mathrm{w}}^* - c_{\mathrm{w}})$$

Met $c_{\mathrm{w}}^* = c_{\mathrm{g}}/m$ wordt dit:

$$\frac{A\, H}{2} \frac{\mathrm{d}c_{\mathrm{w}}}{\mathrm{d}t} = -\left(\phi_V + k\, A\right)\ c_{\mathrm{w}} + k\, A\, \frac{c_{\mathrm{g}}}{m}$$

b. In de stationaire situatie is het linkerlid 0.

$$c_{\mathrm{w}} = \frac{k\, A}{\phi_V + k\, A} \frac{c_{\mathrm{g}}}{m}$$

c. De stofoverdrachtscoëfficiënt k volgt dan uit

$$k = \frac{\phi_V\, c_{\mathrm{w}}}{A\ ((c_{\mathrm{g}}/m) - c_{\mathrm{w}})}$$

Opgave 5.

a. Het gaat erom voor het pak met $500\,\mathrm{g}$ te bepalen wanneer een evengroot deel van het aroma is verdwenen. Omdat het pak twee keer zoveel inhoud heeft zou dat een factor twee in tijd langer duren. Echter ook het folie-oppervlak is groter geworden en wel met een factor $2^{2/3}$. Hierdoor neemt ook de molenstroom toe met een factor $2^{2/3}$. Beide effecten in rekening brengend komen we op een verlenging van de houdbaarheidstermijn met een factor $2^{1/3} \approx 1.26$. Deze termijn wordt dan 22.7 maand.

b. Bij volledige bonen gaat ook het diffusieproces in de bonen meespelen. Wanneer bijvoorbeeld de lineaire afmeting van boon en maalsel een factor 30 verschillen, zal een diffusieproces een factor 900 in tijd verschillen. Veliest het maalsel het aroma in ca. 1 dag, dan zal een boon het aroma verliezen in ca. 30 maanden.

Opgave 6.

a. Wanneer we vergelijking 4.15 uit het boek uitbreiden met de productieterm vinden we achtereenvolgens:

$$0 = 2\,\pi\,r\,L\,\left[-I\!D\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r}\right]_r - 2\,\pi\,(r+\mathrm{d}r)\,L\,\left[-I\!D\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r}\right]_{r+\mathrm{d}r} - k_\mathrm{r}\,2\,\pi\,r\,L\,\mathrm{d}r$$

$$r\,\left[-I\!D\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r}\right]_r - (r+\mathrm{d}r)\,\left[-I\!D\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r}\right]_{r+\mathrm{d}r} = k_\mathrm{r}\,r\,\mathrm{d}r$$

Delen door $\mathrm{d}r$ geeft dan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{k_\mathrm{r}}{I\!D}\,r$$

$$r\,\frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r} = \frac{k_\mathrm{r}}{I\!D}\,r$$

b. We delen door r en noemen $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r} = p$:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} + \frac{p}{r} = \frac{k_\mathrm{r}}{I\!D}$$

Een particuliere oplossing hiervan is: $p = \frac{k_\mathrm{r}}{2\,I\!D}\,r$. Voor de homegene vergelijking vinden we:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} + \frac{p}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}r}{r} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{A}{r}$$

A is hierin een integratieconstante.

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r} = \frac{A}{r} + \frac{k_\mathrm{r}}{2\,I\!D}\,r$$

Integreren geeft dan

$$c = A\,\ln r + \frac{k_\mathrm{r}}{4\,I\!D}\,r^2 + B$$

met B een tweede integratieconstante. Met de randvoorwaarde op $r = R_2$ vinden we

$$0 = \frac{A}{R_2} + \frac{k_\mathrm{r}}{2\,I\!D}\,R_2 \quad \text{ofwel} \quad A = -\frac{k_\mathrm{r}}{2\,I\!D}\,R_2^2$$

De randvoorwaarde op $r = R_1$ geeft

$$c_0 = A\,\ln R_1 + \frac{k_\mathrm{r}}{4\,I\!D}\,R_1^2 + B$$

en tenslotte

$$(c_0 - c)\,\frac{2\,I\!D}{k_\mathrm{r}\,R_2^2} = \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) - \frac{r^2 - R_1^2}{2\,R_2^2}$$

c.

$$\frac{\phi_m}{L} = -I\!D\,\left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r}\right|_{r=R_1} 2\,\pi\,R_1 = \pi\,k_\mathrm{r}\,\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

Een resultaat dat ook direct is op te schrijven uit een massabalans over het totale weefsel.

Opgave 7.

a. Met de analogie tussen warmte-overdracht en stofoverdracht:

$$k = \frac{h}{\rho\, c_p}\, Le^{-2/3}$$

vinden we met $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ en $c_p = 4.2 \times 10^3\,\mathrm{J/kg\,K}$: $k = 1.1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m/s}$.

b. Een massabalans voor de zoutlaag geeft:

$$-\rho_\mathrm{z}\, \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} = k\ (c^* - c_0)$$

De bulkconcentratie in het water is hier $c_0 = 0$.

$$\mathrm{d}t = -\frac{\rho_\mathrm{z}}{k\, c^*}\, \mathrm{d}\delta \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{\rho_\mathrm{z}}{k\, c^*} \int_\delta^0 \mathrm{d}\delta = \frac{\rho_\mathrm{z}\, \delta}{k\, c^*}$$

Invullen geeft $t = 152\,\mathrm{s}$.

Opgave 8.

a.

$$\phi''_m = k\,(c^* - c_\infty) = k\, c^* = Sh\, \frac{I\!D}{D}\, c^* = Sh\, \frac{I\!D}{D}\, \frac{p_\mathrm{v}\, M}{R\,T} = 5.65 \times 10^{-6}\, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^2\,s}}$$
$$\phi_m = \phi''_m\, A = \phi''_m\, \pi\, D\, L = 3.55 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg/s}$$

b. Een massabalans over de cilinder geeft:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho_\mathrm{X}\, \frac{\pi}{4}\, D^2\, L\right) = -\phi_m = -\pi\, D\, L\, Sh\, \frac{I\!D}{D}\, \frac{p_\mathrm{v}\, M}{R\,T}$$

Dit kan, met het scheiden der variabelen, worden omgeschreven naar

$$\mathrm{d}D^2 = -\frac{4\, Sh\, I\!D}{\rho_\mathrm{X}}\, \frac{p_\mathrm{v}\, M}{R\,T}\, \mathrm{d}t$$

Integreren geeft

$$D^2 = -\frac{4\, Sh\, I\!D}{\rho_\mathrm{X}}\, \frac{p_\mathrm{v}\, M}{R\,T}\, t + C_1$$

De integratieconstante C_1 volgt uit $D = D_0$ voor $t = 0$

$$D^2 = D_0^2 - \frac{4\, Sh\, I\!D}{\rho_\mathrm{X}}\, \frac{p_\mathrm{v}\, M}{R\,T}\, t$$

c. Na één dag ($t = 24 \times 3600\,\mathrm{s}$):
$D^2 = 9.02 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2}$, $D = 0.0095\,\mathrm{m}$, $\Delta D = -0.5\,\mathrm{mm}$

Opgave 9.

a. De massabalans geeft als differentiaalvergelijking voor de concentratie:

$$I\!D\, \frac{\mathrm{d}^2 c_A}{\mathrm{d}x^2} - k_1\, c_A = 0$$

Deze moet worden opgelost met randvoorwaarden:

$$c_A(0) = c_{A,0} \quad \text{en} \quad \left.\frac{\mathrm{d}c_A}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = 0$$

b. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is:

$$c_A(x) = C_1\, e^{-mx} + C_2\, e^{mx}$$

met constanten C_1 en C_2 en $m = (k_1/I\!\!D)^{\frac{1}{2}}$. Invullen van de randvoorwaarden geeft:

$$c_{A,0} = C_1 + C_2 \quad \text{en} \quad -\,m\, C_1\, e^{-m\,L} + m\, C_2\, e^{m\,L} = 0$$

Dit leidt tot:

$$C_2 = \frac{c_{A,0}}{e^{2\,m\,L} + 1} \quad \text{en} \quad C_1 = \frac{c_{A,0}\, e^{2\,m\,L}}{e^{2\,m\,L} + 1}$$

Met als eindresultaat:

$$c_A(x) = \frac{c_{A,0}}{e^{2\,m\,L} + 1}\, \left[e^{m(2\,L-x)} + e^{m\,x}\right] = c_{A,0}\, \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(m\,L)}$$

Opgave 10.

a. De concentratie zuurstof in de lucht vinden we uit de gewichtsfractie en de dichtheid:

$$c_0 = 0.2\,\rho = 0.24\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 240\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}$$

De verdelingscoëfficiënt (m) van de zuurstof, hier gedefinieerd als de evenwichtsconcentratie in de vloeistof gedeeld door de concentratie in het gas, wordt nu

$$m = \frac{8}{240} = \frac{1}{30}$$

b.
1. De zuurstofconcentratie in de omringende lucht halveert en daarom moet de concentratie in de vloeistof gaan afnemen. Het transport is dus uit de vloeistof naar de lucht.
2. Momentaan halveren beide concentraties aan het grensvlak. Daarna vindt er een diffusieproces plaats in de vloeistof, totdat in de vloeistof de concentratie overal gelijk is geworden aan de grensvlakconcentratie.
3. De verhouding van de zuurstofconcentraties in het water en in de lucht aan het grensvlak blijft gelijk aan m.
4. Na zeer lange tijd is ook de zuurstofconcentratie in het water gehalveerd en dus gelijk aan $4\,\mathrm{mg/l}$.

Opgave 11.

a. In de eindsituatie is het totaal aantal molen gelijk aan dat in de beginsituatie. Met de toestandsvergelijking voor het ideale gas wordt dan gevonden:

$$\frac{p_\mathrm{e}\,(V_1 + V_2)}{R\,T_0} = \frac{p_{20}\,V_2}{R\,T_0} \quad \text{en de einddruk} \quad p_\mathrm{e} = \frac{V_2}{V_1 + V_2}\,p_{20} = 0.133\,\mathrm{bar}$$

b. Uit het constant blijven van het aantal molen volgt met de ideale gaswet:

$$n_{20} = n_1 + n_2 \quad \text{ofwel} \quad p_{20}\,V_2 = p_1\,V_1 + p_2\,V_2$$

c. De concentratie $c_{2\mathrm{i}}$ aan het rechter interface van de folie is $m = 2.5$ maal hoger dan de concentratie in gasvolume 2: $c_{2\mathrm{i}} = m\, c_2$. Evenzo is de concentratie $c_{1\mathrm{i}}$ aan het linker interface van de folie $m = 2.5$ maal hoger dan de concentratie in gasvolume 1: $c_{1\mathrm{i}} = m\, c_1$. De molenstroom door de folie wordt gegeven door:

$$\phi_{\mathrm{mol}} = A\, I\!\!D\, \frac{(c_{2\mathrm{i}} - c_{1\mathrm{i}})}{d} = A\, I\!\!D\, m\, \frac{(c_2 - c_1)}{d} = \frac{m\, A\, I\!\!D}{R\, T_0\, d}\, (p_2 - p_1)$$

Met de massabalans over volume V_1

$$\frac{\mathrm{d}(V_1\, c_1)}{\mathrm{d}t} = \phi_{\mathrm{mol}}$$

wordt de differentiaalvergelijking voor druk p_1:

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} = \frac{m\, A\, I\!\!D}{V_1\, d}\, (p_2 - p_1) = \frac{m\, A\, I\!\!D}{V_1\, d}\, (p_{20} - \frac{V_1 + V_2}{V_2}\, p_1)$$

Opgave 12.

De dikte van de zoutlaag is zo klein vergeleken met de boldiameter $\delta \ll D$, dat we mogen veronderstellen met een vlak zoutlaagje van doen te hebben.

Enkele eigenschappen van water bij $20\,^{\circ}\mathrm{C}$.
Bron: Data Companion

Naam	Symbool	Waarde	Eenheid
Warmtevereffeningscoëfficiënt	a	0.143×10^{-6}	$\mathrm{m^2/s}$
Dynamische viscositeit	μ	100.2	$\mathrm{Pa\,s}$
Dichtheid	ρ	998.23	$\mathrm{kg/m^3}$
Soortelijke warmte	c_p	4185	$\mathrm{J/kg\,K}$
Prandtlgetal	Pr	7.01	-

a. Voor het lewisgetal, de verhouding van warmtevereffeningscoëfficiënt en diffusiecoëfficiënt, volgt dan

$$Le = \frac{a}{I\!\!D} = \frac{0.143 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-9}} = 47.7$$

De stofoverdrachtscoëfficiënt kan nu uit de warmteoverdrachtscoëfficiënt worden gevonden middels vergelijking 4.77:

$$k = \frac{h}{\rho_{\mathrm{w}}\, c_{p\mathrm{w}}}\, Le^{-2/3} = \frac{156}{998.23 \times 4185}\, 47.7^{-2/3} = 2.83 \times 10^{-6}\,\mathrm{m/s}$$

b. Voor gedwongen stroming om een bol geldt onder zekere condities vergelijking 4.67. Hier wordt gevonden

$$Re = \frac{\rho_{\mathrm{w}}\, v\, D}{\mu} = \frac{998.23 \times 2 \times .5}{100.2} = 9962$$

en

$$Sc = \frac{\mu}{\rho_{\mathrm{w}}\, I\!\!D} = \frac{100.2}{998.23 \times 3 \times 10^{-9}} = 334.6$$

en daarmee mag 4.67 inderdaad worden toegepast:

$$Sh = 2.0 + 0.66\, Re^{1/2}\, Sc^{1/3} = 459.3$$

Met de definitie van Sh, vergelijking 4.22

$$k = \frac{Sh\, I\!\!D}{D} = \frac{459.3 \times 3 \times 10^{-9}}{0.5} = 2.76 \times 10^{-6}\,\mathrm{m/s}$$

c.

$$\text{Massabalans zout} \quad \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} = -\frac{k\,C^*\,M_z}{\rho_z}$$

d.

$$\text{leidt met beginvoorwaarde tot:} \quad \delta = \delta_0 - \frac{k\,C^*\,M_z}{\rho_z}\,t$$

$\delta = 0$ for $t = 7100\,\mathrm{s}$

Opgave 13.

a. Het prandtlgetal speelt een rol bij convectief warmtetransport en is gelijk aan $Pr = \dfrac{\mu}{\rho\,a}$.
   Bij stoftransport komen we het schmidtgetal tegen wat gegeven wordt door: $Sc = \dfrac{\mu}{\rho\,I\!D}$.
   We vinden dan:

$$Sc = Pr\,\frac{a}{I\!D} = 7.01\frac{0.143\,\times\,10^{-6}}{10^{-9}} = 1002.4$$

b. Met vergelijking 3.116 uit het boek of met gebruik van de'Data Companion' vinden we:

$$\langle Sh\rangle = \frac{\langle k\rangle\,D}{I\!D} = 1.62\left(Re\,Sc\,\frac{D}{L}\right)^{1/3} = 20.4 \;\;\text{mits}\;\; \frac{L}{Re\,Sc\,D} = 5\,\times\,10^{-4} < 0.05$$

c. Een massabalans over de hele pijp geeft:

$$\phi_V\;(\langle c\rangle - 0) = \langle k\rangle\,\pi\,D\,L\,(c_0 - 0)$$

   Uitgedrukt in de gevraagde dimensieloze parameters krijgen we dan:

$$\frac{\langle c\rangle}{c_0} = \frac{4\,\times\,1.62}{(Re\,Sc\,D/L)^{2/3}} = 0.0408$$

   en daarmee voor de gemiddelde zoutconcentratie aan het eind van de pijp $\langle c\rangle = 12.2\,\mathrm{kg/m^3}$.

d. Zolang de hele buiswand nog met zout is bedekt geldt

$$Sh = \frac{k\,D}{I\!D} = 1.08\left(Re\,Sc\,\frac{D}{x}\right)^{1/3}$$

   Een micro-massabalans over een klein plakje $\mathrm{d}x$ geeft:

$$\phi_V\;(\langle c\rangle_{x+\mathrm{d}x} - \langle c\rangle_x) = k(x)\,\pi\,D\,\mathrm{d}x\;(c_0 - \langle c\rangle)$$

   Dit kan worden omgewerkt tot:

$$\frac{\mathrm{d}\langle c\rangle}{c_0 - \langle c\rangle} = \frac{4\,Sh}{Re\,Sc}\,\frac{\mathrm{d}x}{D} = \frac{4\,\times\,1.08}{(Re\,Sc\,D)^{2/3}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^{1/3}}$$

$$\frac{\mathrm{d}(c_0 - \langle c\rangle)}{c_0 - \langle c\rangle} = -\frac{4\,\times\,1.08}{(Re\,Sc\,D)^{2/3}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^{1/3}}$$

   Dit integreren tussen 0 en L geeft

$$\ln\left(1 - \frac{\langle c\rangle}{c_0}\right) = -\frac{4\,\times\,1.62\,L^{2/3}}{(Re\,Sc\,D)^{2/3}}$$

en uiteindelijk

$$\frac{\langle c \rangle}{c_0} = 1 - \exp\left(-\frac{4 \times 1.62}{(Re\,Sc\,D/L)^{2/3}}\right) = 0.03994$$

Een eerste orde benadering van de exponentiële functie leidt tot het eerder verkregen resultaat. Het verschil tussen beide benaderingen is bij de gegeven parameters kleiner dan 2%. Hier vinden we voor de gemiddelde zoutconcentratie aan het eind van de pijp $\langle c \rangle = 12.0\,\mathrm{kg/m^3}$.

Opgave 14.

a. In de eindsituatie is het totaal aantal molen gelijk aan dat in de beginsituatie. Met de toestandsvergelijking voor het ideale gas wordt dan gevonden:

$$\frac{p_\mathrm{e}\,(V_1 + V_2)}{R\,T_0} = \frac{p_{20}\,V_2}{R\,T_0}$$

b. Uit het constant blijven van het aantal molen volgt met de ideale gaswet:

$$n_{20} = n_1 + n_2 \quad \text{ofwel} \quad p_{20}\,V_2 = p_1\,V_1 + p_2\,V_2$$

c. De concentratie $c_{2\mathrm{i}}$ aan het rechter interface van de folie is m maal hoger dan de concentratie in gasvolume 2: $c_{2\mathrm{i}} = m\,c_2$. Evenzo is de concentratie $c_{1\mathrm{i}}$ aan het linker interface van de folie m maal hoger dan de concentratie in gasvolume 1: $c_{1\mathrm{i}} = m\,c_1$. De molenstroom door de folie wordt gegeven door:

$$\phi_\mathrm{mol} = A\,\mathbb{D}\,\frac{(c_{2\mathrm{i}} - c_{1\mathrm{i}})}{d} = A\,\mathbb{D}\,m\,\frac{(c_2 - c_1)}{d} = \frac{m\,A\,\mathbb{D}}{R\,T_0\,d}\,(p_2 - p_1)$$

Met de massabalans over volume V_1

$$\frac{\mathrm{d}(V_1\,c_1)}{\mathrm{d}t} = \phi_\mathrm{mol}$$

wordt de differentiaalvergelijking voor druk p_1:

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} = \frac{m\,A\,\mathbb{D}}{V_1\,d}\,(p_2 - p_1) = \frac{m\,A\,\mathbb{D}}{V_1\,d}\,(p_{20} - \frac{V_1 + V_2}{V_2}\,p_1)$$

d. Invullen van $t = 0$ in de voorgestelde oplossing geeft $p_1 = 0$. De oplossing voldoet daarmee aan de beginvoorwaarde. Invullen in de differentiaalvergelijking geeft

$$k\,p_\mathrm{e}\,\exp(-k\,t) = \frac{m\,A\,\mathbb{D}}{d}\,\frac{V_1 + V_2}{V_1\,V_2}\,p_\mathrm{e}\,\exp(-k\,t)$$

met als resultaat

$$k = \frac{m\,A\,\mathbb{D}}{d}\,\frac{V_1 + V_2}{V_1\,V_2} = \frac{m\,A\,\mathbb{D}}{d}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)$$