# TN4780TU Fysische Transportverschijnselen

## Tentamenopgaven hoofdstuk 3

**Opgave 1.** 2 april 2008

In stromend water met een temperatuur van $15\,^\circ\mathrm{C}$ steekt men, dwars op de stromingsrichting, twee temperatuurmeetelementen die een temperatuur van $25\,^\circ\mathrm{C}$ hebben. Het eerste element bestaat uit een lange massieve glazen cilinder waarin zich in de as ver van het uiteinde een thermokoppel bevindt. Het tweede element bestaat uit een lange massieve koperen cilinder waarin zich eveneens in de as ver van het uiteinde een thermokoppel bevindt.

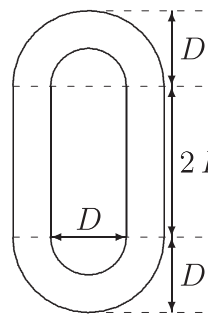
a. Bereken voor elk van beide meetelementen de verhouding van de inwendige en uitwendige weerstand voor warmteoverdracht.

b. Bereken voor elk van beide elementen hoe lang het duurt voordat het een temperatuur van $16\,^\circ\mathrm{C}$ aanwijst. Verwaarloos hierbij voor elk de kleinste van de inwendige en uitwendige warmteweerstanden.

Gegevens:

| | | |
|---|---|---|
| Diameter van beide cilinders | : | $D = 4\,\mathrm{mm}$ |
| Snelheid van het stromende water | : | $v = 0.5\,\mathrm{m/s}$ |
| Stofeigenschappen van water: | | |
| warmtegeleidingscoëfficiënt | : | $\lambda_\mathrm{w} = 0.6\,\mathrm{W/m\,K}$ |
| soortelijke warmte | : | $c_{p,\mathrm{w}} = 4.2 \times 10^3\,\mathrm{J/kg\,K}$ |
| viscositeit | : | $\mu_\mathrm{w} = 10^{-3}\,\mathrm{kg/m\,s}$ |
| dichtheid | : | $\rho_\mathrm{w} = 1.0 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ |
| Stofeigenschappen van glas: | | |
| warmtegeleidingscoëfficiënt | : | $\lambda_\mathrm{g} = 0.8\,\mathrm{W/m\,K}$ |
| soortelijke warmte | : | $c_{p,\mathrm{g}} = 0.8 \times 10^3\,\mathrm{J/kg\,K}$ |
| dichtheid | : | $\rho_\mathrm{g} = 2.5 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ |
| Stofeigenschappen van koper: | | |
| warmtegeleidingscoëfficiënt | : | $\lambda_\mathrm{k} = 400.\,\mathrm{W/m\,K}$ |
| soortelijke warmte | : | $c_{p,\mathrm{k}} = 0.4 \times 10^3\,\mathrm{J/kg\,K}$ |
| dichtheid | : | $\rho_\mathrm{k} = 8.0 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ |

**Opgave 2.** 2 april 2008




Een hoeveelheid ijs wordt al enige tijd bewaard in een kleine voor warmte geïsoleerde container. Het ijs warmt heel langzaam op en bereikt op zeker moment het smeltpunt bij $0\,^\circ\mathrm{C}$. Daarna begint het ijs te smelten en gedurende dat smeltproces blijft de temperatuur van het ijs-watermengsel en de binnenwand constant en gelijk aan $0\,^\circ\mathrm{C}$.
De container bestaat uit een eindige cilinder die aan top en bodem is afgesloten door een halve bol (zie figuur). De inwendige diameter van de container $D = 0.100\,\mathrm{m}$. De dikte van de isolerende wand is overal hetzelfde en gelijk aan $D/2 = 0.05\,\mathrm{m}$.
De warmtegeleidingscoëfficiënt van het wandmateriaal is slechts $\lambda = 0.04\,\mathrm{W/m\,K}$. De buitenzijde van de isolerende wand bevindt zich op een temperatuur $T_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$. De smeltwarmte van ijs is $\Delta h_\mathrm{sf} = 333\,\mathrm{kJ/kg}$.

a. Hoe lang duurt in de gegeven situatie het smelten van $1\,\mathrm{kg}$ ijs?

**Hint:** Voor de berekening van de totale warmteweerstand moet je de wand van de container opgebouwd denken uit drie losse delen: een cilinderschil en twee halve bolschillen.

**Opgave 3.** 22 augustus 2008

Om de warmtegeleidingscoëfficiënt van alcohol te bepalen, worden de volgende twee proeven gedaan:

**Proef 1:** Een thermometer, gevuld met alcohol en met een bolvormig zeer dunwandig reservoir, wordt op $20\,^\circ\mathrm{C}$ gebracht. Vervolgens wordt de thermometer in stromend water van $70\,^\circ\mathrm{C}$ gestoken. De warmteoverdrachtsweerstand ligt dan geheel *in* het reservoir. Warmteoverdracht naar de steel van de thermometer is te verwaarlozen. In de alcohol treedt geen vrije convectie op. Na $t_1 = 41\,\mathrm{s}$ blijkt de thermometer $65\,^\circ\mathrm{C}$ aan te wijzen.

**Proef 2:** Nadat de temperatuur van de thermometer op $70\,^\circ\mathrm{C}$ gebracht is, wordt deze vervolgens in stilstaande lucht van $20\,^\circ\mathrm{C}$ gehangen. De warmteoverdrachtsweerstand ligt dan geheel *buiten* het reservoir. Ook in de lucht treedt geen vrije convectie op. Warmteoverdracht naar de steel van de thermometer is te verwaarlozen. Na $t_2 = 1110\,\mathrm{s}$ wijst de thermometer $25\,^\circ\mathrm{C}$ aan.
$\lambda_{\mathrm{lucht}} = 0.025\,\mathrm{W/m\,K}$.

a. Bereken uit de gegevens van deze proeven de warmtegeleidingscoëfficiënt van alcohol.

**Opgave 4.** 22 augustus 2008

In een hooiberg wordt door biochemische activiteit per $\mathrm{m}^3$ $10\,\mathrm{W}$ aan warmte geproduceerd: $Q_0''' = 10\,\mathrm{W/m^3}$. De hooiberg kan worden gezien als een halve bol met straal $R = 2.5\,\mathrm{m}$ die op een voor warmte geïsoleerde vloer staat. De warmtegeleidingscoëfficiënt van hooi is $\lambda = 0.05\,\mathrm{W/m\,K}$. De hooiberg bevindt zich al lange tijd in de gegeven situatie en er heeft zich een stationaire toestand ingesteld.

a. Geef een voor dit systeem geschikte vorm van de (micro)warmtebalans en leid hier een vergelijking uit af voor het temperatuurprofiel in de hooiberg als functie van de straal $r$. Ga na, dat die afhankelijkheid kwadratisch is. Neem als randvoorwaarde, dat de temperatuur aan de buitenkant van de hooiberg gelijk is aan $T_{\mathrm{w}}$.

b. Hoeveel hoger is nu de temperatuur in het midden van de hooiberg in vergelijking met de buitenkant van de hooiberg?

**Opgave 5.** 22 augustus 2008, 16 januari 2009

Water met een constante massastroom $\phi_m = 48 \times 10^3\,\mathrm{kg/h}$ wordt met een warmtewisselaar gekoeld van $100\,^\circ\mathrm{C}$ naar $65\,^\circ\mathrm{C}$. Daarvoor is beschikbaar een even grote stroom koud water met ingangstemperatuur $25\,^\circ\mathrm{C}$. De snelheid van het water is zodanig, dat de overall warmteoverdrachtscoëfficiënt tussen beide stromen gelijk is aan $2 \times 10^3\,\mathrm{W/m^2\,K}$. Er is een verwaarloosbare drukval over de warmtewisselaar. Warmteuitwisseling met de omgeving is verwaarloosbaar en de soortelijke warmte van water mag als een constante worden beschouwd.

a. Tot welke temperatuur wordt het koude water opgewarmd?

b. Hoeveel warmte wordt er per tijdseenheid van de warme waterstroom naar de koude waterstroom overgedragen?

c. Bereken het benodigde warmtewisselend oppervlak van deze warmtewisselaar, zowel voor het geval deze in meestroom als in tegenstroom wordt bedreven.

**Opgave 6.** 1 april 2009

In een bol radioactief uraniumoxide vindt de warmteproductie $Q'''$ (in $\mathrm{W/m^3}$) plaats uniform verdeeld over de bol. Het oppervlak van de bol wordt op een constante temperatuur $T_\mathrm{w}$ gehouden. We nemen aan, dat de toestand stationair is.

a. Stel de differentiaalvergelijking op die het warmtetransport in de bol beschrijft.

b. Bereken de temperatuur in het middelpunt van de bol als gegeven is: $Q''' = 6 \times 10^6\,\mathrm{W/m^3}$, $T_\mathrm{w} = 20\,^\circ\mathrm{C}$, de straal van de bol $R = 0.10\,\mathrm{m}$ en de warmtegeleidingscoëfficiënt van uraniumoxide $\lambda = 8\,\mathrm{W/m\,K}$.

**Opgave 7.** 1 april 2009

Een warmtewisselaar bestaat uit een dunwandige metalen pijp met diameter $D$ waardoorheen lucht stroomt met massadebiet $\phi_m$. Deze lucht wordt opgewarmd van ingangstemperatuur $T_1$ naar uitgangstemperatuur $T_2$. Aan de buitenzijde van de pijp condenseert stoom. Daarmee wordt bereikt, dat de binnenzijde van de pijp een constante temperatuur $T_\mathrm{w}$ heeft.

De gemiddelde warmteoverdrachtscoëfficiënt aan de binnenzijde van de buiswand is $h$. Deze $h$ voldoet aan de betrekking

$$Nu = 0.027\,Re^{0.8}\,Pr^{0.33}$$

De stofconstanten van lucht, bijvoorbeeld de soortelijke warmte $c_p$, mogen hierin constant verondersteld worden. De effecten van drukvallen over de pijp en van potentiële en kinetische energie worden verwaarloosd.

a. Leid af, dat voor de benodigde lengte van de pijp $L$ geldt:

$$L = \frac{\phi_m\,c_p}{h\,\pi\,D}\,\ln\left(\frac{T_\mathrm{w} - T_1}{T_\mathrm{w} - T_2}\right)$$

b. Met welke factor wordt de benodigde pijplengte $L$ vergroot, indien:

   1. de pijpdiameter wordt verdubbeld,
   2. de massastroom wordt verdubbeld,
   3. de pijpdiameter en de massastroom worden verdubbeld.

**Opgave 8.** 21 augustus 2009

Op een koude winterdag likt een Delfts ketelbinkie aan een brugleuning en ogenblikkelijk is zijn tong vastgevroren aan de leuning. Neem aan dat de dichtheid van de tong $980\,\mathrm{kg/m^3}$ bedraagt en dat voor de overige thermische eigenschappen mag worden aangenomen dat een tong zich gedraagt als dood varkensvlees. De brugleuning bestaat uit massief ijzer. De vochtige speeksellaag op de tong is zo dun, dat de thermische eigenschappen daarvan, bijvoorbeeld de stolwarmte, geen rol van betekenis spelen. Ook het effect van een eventueel aanwezige verflaag kan worden verwaarloosd.

a. Geef een uitdrukking voor de maximum temperatuur van de brugleuning en bereken deze.

b. Men probeert de tong los te krijgen door op een afstand van ca. $0.5\,\mathrm{m}$ de brugleuning met een brander te verwarmen. Maak een grove schatting van de tijd die verstrijkt totdat er een temperatuureffect op de plaats van de vastgevroren tong merkbaar is.

**Opgave 9.** 21 augustus 2009

Een vlakke metalen strip is in twee richtingen oneindig uitgestrekt en heeft een dikte $d$. Aan de onderkant, $x = 0$, is de vlakke strip perfect geïsoleerd. Aan de andere kant, $x = d$, grenst hij aan olie met temperatuur $T_0$. Door de metalen strip loopt een elektrische stroom, die overal een warmteproductie $W$, in $\mathrm{W/m^3}$, veroorzaakt. De warmteoverdracht aan de oliezijde kan beschreven worden met een warmteoverdrachtscoëfficiënt $h$. De warmtegeleidingscoëfficiënt van het metaal is $\lambda$.

a. Leid in de stationaire situatie de uitdrukking af voor de temperatuur $T_d$ op $x = d$, als functie van $T_0$ en $W$.

b. Geef twee uitdrukkingen voor de warmteflux door het vlak $x = d$.

c. Leid een uitdrukking af voor het stationaire temperatuursprofiel in de strip.

d. Waar is de temperatuur maximaal?

**Opgave 10.** 21 augustus 2009

Een object met onbekende vorm heeft een volume $V$ en een buitenoppervlakte $A$. De warmtegeleidingscoëfficiënt $\lambda$, dichtheid $\rho$ en soortelijke warmte $c_p$ zijn bekend en hebben een constante waarde. Het object heeft oorspronkelijk temperatuur $T_0$ en bevindt zich in een stroming met temperatuur $T_1$.

a. Bereken met behulp van de penetratietheorie voor korte tijden de dimensieloze gemiddelde temperatuur $(\langle T\rangle - T_0)(T_1 - T_0)$ voor het geval er op tijdstip $t = 0$ een wandtemperatuur $T_1$ wordt opgedrukt.

b. Bereken voor het geval dat de interne thermische weerstand verwaarloosbaar is ten opzichte van de externe thermische weerstand, ofwel $h_\mathrm{u}\, V/(\lambda\, A) \ll 1$ de dimensieloze gemiddelde temperatuur $(\langle T\rangle - T_1)(T_0 - T_1)$ als functie van de tijd voor het geval dat het object op tijdstip $t = 0$ in de stroming gebracht wordt.

**Opgave 11.** 21 augustus 2009

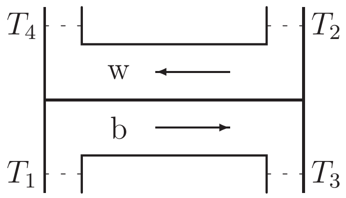
In een fabriek moet een waterstroom met een debiet $\phi_V = 100\,\mathrm{m^3/h}$ afgekoeld worden van $T_1 = 70\,^\circ\mathrm{C}$ naar $T_L = 30\,^\circ\mathrm{C}$. Hiervoor wordt een warmtewisselaar ontworpen. De wisselaar bestaat uit $100$ rechte stalen pijpen, elk met een diameter van $1\,\mathrm{cm}$ en een lengte van $3\,\mathrm{m}$. Deze pijpen zijn parallel geschakeld. De temperatuur van de wand van de pijpen wordt op $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ gehouden. Bij het proefdraaien met de pijpen blijkt de watertemperatuur slechts tot $40\,^\circ\mathrm{C}$ gezakt te zijn. Er wordt een ervaren technoloog bijgehaald. Die rekent snel uit hoeveel langer de buizen moeten zijn om $30\,^\circ\mathrm{C}$ te bereiken. Neem bij de berekeningen voor zover nodig de watereigenschappen bij $50\,^\circ\mathrm{C}$.

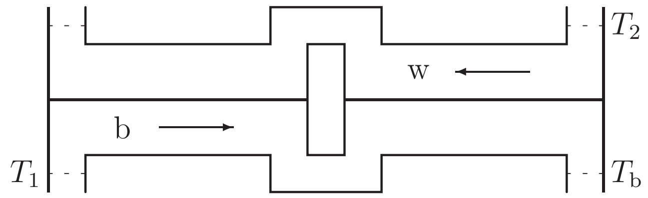
a. Laat zien of en hoe de warmteoverdrachtscoëfficiënt afhangt van de lengtecoordinaat van de pijp.

b. Bereken de vereiste lengte.

**Opgave 12.** 25 januari 2010

In een warmtewisselaar wordt benzeen van $T_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ tot $T_3 = 60\,^\circ\mathrm{C}$ opgewarmd in tegenstroom met water, dat daarbij van $T_2 = 88\,^\circ\mathrm{C}$ tot $T_4 = 48\,^\circ\mathrm{C}$ afkoelt. De warmtewisselaar is goed geïsoleerd, zodat de warmte-overdracht naar de omgeving kan worden verwaarloosd. De totale warmteoverdrachtscoëfficiënt tussen het benzeen en het water heeft overal in de warmtewisselaar dezelfde waarde. In het magazijn is nog een tweede warmtewisselaar van hetzelfde type voorradig. Men besluit de twee warmtewisselaars in serie te zetten.

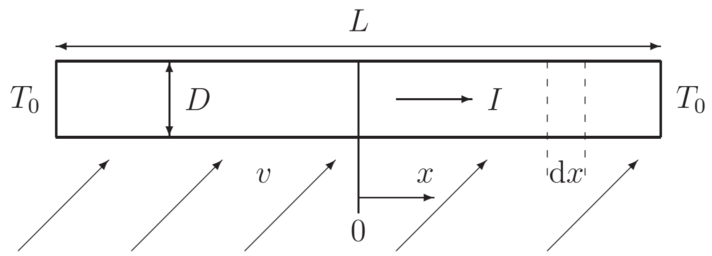



a. Laat zien, dat het product $\phi_m\, c_p$ voor beide stofstromen dezelfde waarde heeft en druk het product van totale warmteoverdrachtscoëfficiënt $U$ en warmte-uitwisselend oppervlak $A$ van de enkele warmtewisselaar uit in $\phi_m\, c_p$.

b. Bereken de eindtemperatuur van het benzeen wanneer beide warmtewisselaars bij gelijkblijvende massastromen in serie worden geschakeld.

**Opgave 13.** 12 april 2010




Door een ronde horizontale koperen draad met lengte $L$ en diameter $D$ loopt een elektrische stroom $I$. De draad is gekenmerkt door een soortelijke elektrische weerstand $\rho_\mathrm{el}$. Door de elektrische stroom wordt in een plakje met dikte $\mathrm{d}x$ een hoeveelheid warmte geproduceerd gelijk aan

$$P = \frac{4\, I^2\, \rho_\mathrm{el}}{\pi\, D^2}\,\mathrm{d}x$$

Aan de uiteinden van de draad is de (gemeten) temperatuur van de draad gelijk aan $T_0$. De draad wordt dwars aangestroomd door lucht met snelheid $v$. Hierdoor heeft de draad een constante warmteoverdrachtscoëfficiënt naar de omgevingslucht die eveneens temperatuur $T_0$ heeft. De temperatuur in de draad is in goede benadering alleen een functie van de axiale coördinaat $x$.

a. Geef de warmtebalans over een plakje $\mathrm{d}x$ en laat zien dat deze kan worden omgewerkt tot de differentiaalvergelijking:

$$\lambda\,\frac{\pi\, D^2}{4}\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h_\mathrm{u}\,\pi\, D\, T = -h_\mathrm{u}\,\pi\, D\, T_0 - \frac{4\,\rho_\mathrm{el}\, I^2}{\pi\, D^2}$$

b. Probeer een oplossing van de vorm $\exp(kx)$ voor het homogene deel en zoek een eenvoudige functie als particuliere oplossing.

c. Geef de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking en bepaal de daarin voorkomende constante(n) met behulp van de gegeven randvoorwaarden. Gebruik in het eindantwoord: $\dfrac{\exp(k\,x) + \exp(-k\,x)}{2} = \cosh(k\,x)$

d. Bepaal de temperatuur in het midden van de draad, wanneer verder gegeven is: $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$, $\rho_{\mathrm{el}} = 1.7 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$, $D = 1.4\,\mathrm{mm}$, $L = 0.1\,\mathrm{m}$, $I = 10.0\,\mathrm{A}$ en $v = 1.2\,\mathrm{m/s}$.

**Opgave 14.** 12 april 2010

Door een lange buis met een diameter $D = 0.10\,\mathrm{m}$ stroomt water. De temperatuur van de buiswand $T_{\mathrm{w}}$ is $20\,°\mathrm{C}$ voor axiale coordinaat $x < 0$ en $60\,°\mathrm{C}$ voor $x > 0$. De plaats $x = 0$ bevindt zich ver van het begin van de buis. Het water komt de buis binnen met een uniforme temperatuur $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$. Van het water kunnen de dichtheid $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, de soortelijke warmte $c_p = 4200\,\mathrm{J/kg\,K}$, de viscositeit $\mu = 1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$ en de warmtegeleidingscoëfficiënt $\lambda = 0.60\,\mathrm{W/m\,K}$ temperatuursonafhankelijk worden verondersteld. De stroming is laminair: $Re = 1000$.

a. Geef een micro-energiebalans voor een plakje $\mathrm{d}x$.

b. Leid een vergelijking af voor de gemiddelde temperatuur in de buis voor $x > 0$.

c. Voor welke lengte is de gemiddelde temperatuur $25\,°\mathrm{C}$ en is dan de afleiding nog geldig?

**Opgave 15.** 12 april 2010

Een condensor bestaat uit een aantal parallel geschakelde koperen pijpen met een inwendige diameter $D_{\mathrm{i}} = 22.8\,\mathrm{mm}$ en een wanddikte $d = 1.25\,\mathrm{mm}$. Op de buitenkant van de pijpen condenseert $9080\,\mathrm{kg/h}$ Freon 12 bij een temperatuur $T_0 = 32.2\,°\mathrm{C}$. Door koelwater in de pijpen wordt de condensatiewarmte $r = 137.5\,\mathrm{kJ/kg}$ van Freon 12 afgevoerd. De stroomsnelheid van het water $\langle v \rangle = 1.22\,\mathrm{m/s}$ en de ingangs- en uitgangstemperaturen zijn respectievelijk $T_{\mathrm{i}} = 15.5\,°\mathrm{C}$ en $T_{\mathrm{e}} = 17.8\,°\mathrm{C}$. De totale warmteoverdrachtscoëfficiënt Freon–water, betrokken op het uitwendige pijpoppervlak, is $U = 1010\,\mathrm{W/m^2\,K}$. Voor de dichtheid en soortelijke warmte van water mag worden aangenomen: $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ respectievelijk $c_p = 4200\,\mathrm{J/kg\,K}$.

a. Bepaal de totale per tijdeenheid overgedragen warmte $\phi_q$, de buitendiamter $D_{\mathrm{u}}$ en het logarithmisch gemiddelde temperatuursverschil $\Delta T_{\mathrm{ln}}$.

b. Uit welk aantal pijpen $n$ bestaat de condensor?

c. Wat is de lengte $L$ van deze pijpen?

**Opgave 16.** 23 augustus 2010

Een grote koperen plaat met dikte $d = 2.54\,\mathrm{cm}$ wordt geplaatst tussen twee luchtstromen. De warmteoverdrachtscoëfficiënt aan de onderzijde is $h_1 = 28\,\mathrm{W/m^2\,K}$ en aan de bovenzijde $h_2 = 57\,\mathrm{W/m^2\,K}$. Na lange tijd op $T_0 = 38\,°\mathrm{C}$ te zijn geweest wordt de temperatuur van beide luchtstromen plotseling verhoogd naar $T_1 = 93\,°\mathrm{C}$. Er mag worden aangenomen dat koper de warmte zo goed geleidt, dat de temperatuur van de plaat uniform blijft.

a. Leid met een energiebalans een vergelijking af, die de temperatuur van de koperen plaat als functie van de tijd geeft.

b. Hoe lang duurt het voordat de koperen plaat een temperatuur gelijk aan $82\,°\mathrm{C}$ bereikt?

**Opgave 17.** 23 augustus 2010

Een bolvormig veronderstelde rode biet met een massa $M = 0.118\,\mathrm{kg}$ en een begintemperatuur $T_1 = 17\,°\mathrm{C}$ wordt in een grote pan net niet kokend water gedompeld. Dit water wordt op constante temperatuur $T_0 = 100\,°\mathrm{C}$ gehouden.

| | $\lambda$ $\mathrm{W/m\,K}$ | $\rho$ $\mathrm{kg/m^3}$ | $c_p$ $\mathrm{J/kg\,K}$ |
|---|---|---|---|
| Biet | $0.519$ | $1040.$ | $3900.$ |
| Water | $0.682$ | $959.$ | $4220.$ |

a. Bereken de oppervlaktetemperatuur van de biet onmiddellijk nadat deze in contact met het water is gekomen. Neem daarbij aan dat voor zeer korte tijden het warmtetransport alleen nog door geleiding wordt gedomineerd.

b. Hoe lang duurt het met een warmteoverdrachtscoëfficiënt $h = 170\,\mathrm{W/m^2\,K}$ voordat de gemiddelde temperatuur van de biet hoger is dan $95\,°\mathrm{C}$?

**Opgave 18.** 23 augustus 2010

Door een ronde, rechte, roestvrij stalen buis (diameter inwendig $D = 10\,\mathrm{cm}$, wanddikte $\delta = 2\,\mathrm{mm}$) stroomt water met een gemiddelde snelheid $\langle v \rangle = 2\,\mathrm{m/s}$. Dit water wordt opgewarmd door middel van stoom die op de buitenzijde van de buis condenseert. Het blijkt dat de totale warmteoverdrachtscoëfficiënt $U$ stoom-water, gebaseerd op de inwendige diameter, $2000\,\mathrm{W/m^2\,K}$ bedraagt. Voor water mag worden aangenomen: viscositeit $\mu = 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$, dichtheid $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, soortelijke warmte $c_p = 4.2 \times 10^3\,\mathrm{J/kg\,K}$ en warmtegeleidingscoëfficiënt $\lambda = 0.6\,\mathrm{W/m\,K}$. Gegeven is verder dat de warmtegeleidingscoëfficiënt van roestvrij staal $\lambda_\mathrm{s} = 20\,\mathrm{W/m\,K}$ bedraagt.

a. Bereken de warmteoverdrachtscoëfficiënt $h_\mathrm{i}$ tussen het water en de binnenzijde van de buiswand.

b. Leid het verband af tussen $U$ en de partiële warmteoverdrachtscoëfficiënt stoom-buiswand. Als je bij deze afleiding één of meer benaderingen gebruikt, moet je deze vermelden en rechtvaardigen.

c. Bereken de partiële warmteoverdrachtscoëfficiënt stoom-buiswand.

d. Controleer of de waarde van de partiële warmteweerstand stoom-buiswand kleiner is dan de totale warmteweerstand stoom-water.

**Opgave 19.** 23 augustus 2010

Een zeer viskeus polymeer wordt gemaakt bij een temperatuur van $80\,°\mathrm{C}$. De volgende bewerking moet plaats vinden bij $60\,°\mathrm{C}$ in een ander apparaat. Daarom lijkt het een goed idee het polymeer af te koelen terwijl het door een transportleiding naar dat andere apparaat geperst wordt. Daartoe wordt de wand van de transportleiding op $T_\mathrm{w} = 15\,°\mathrm{C}$ gebracht en gehouden. De diameter $D$ van de leiding is $10\,\mathrm{cm}$ en de lengte $10\,\mathrm{m}$. Het volumedebiet door de leiding $\phi_V = 0.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3/s}$. Er mag aangenomen worden dat bij de pijpingang het snelheidsprofiel zich instantaan instelt.
Eigenschappen van het polymeer: dichtheid $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, soortelijke warmte $c_p = 2 \times 10^3\,\mathrm{J/kg\,K}$, viscositeit $\mu = 1\,\mathrm{Pa\,s}$ en warmtegeleidingscoëfficiënt $\lambda = 0.4\,\mathrm{W/m\,K}$.

a. Bepaal de warmtevereffeningscoëfficiënt van het polymeer.

b. Welke relatie geldt er hier voor de warmteoverdrachtscoëfficiënt?

c. Leid een uitdrukking af die weergeeft hoe de temperatuur van het polymeer in de stromingsrichting afneemt.

d. Laat zien dat aan het einde van de leiding de temperatuur nog niet tot $60\,^{\circ}\mathrm{C}$ gedaald is.

In een proces worden teflon bolletjes met een diameter van $5\,\mathrm{mm}$ gemaakt. Aan het eind van de fabricage hebben deze bolletjes nog een uniforme temperatuur van $60\,^{\circ}\mathrm{C}$. De bolletjes moeten afgekoeld worden tot in de bolletjes de maximale temperatuur $12\,^{\circ}\mathrm{C}$ is. Het idee van een ingenieur is om deze bolletjes door een kolom gevuld met water van $10\,^{\circ}\mathrm{C}$ te laten vallen. Op intuïtieve gronden denkt zijn collega genoeg te hebben aan een kolom van $5\,\mathrm{m}$ hoogte. De ingenieur meent echter (op grond van een berekening) dat deze hoogte te gering is. In deze opgave wordt gevraagd dit na te rekenen.

**Gegevens:** stationaire valsnelheid van een bolletje: $v_\mathrm{s} = 0.44\,\mathrm{m/s}$,
teflon: $\rho = 2200\,\mathrm{kg/m^3}$, $c_p = 1000\,\mathrm{J/kg\,K}$, $\lambda = 0.3\,\mathrm{W/m\,K}$.

a. Toon aan dat de weerstand voor warmtetransport zich in het teflonbolletje bevindt.

b. Bereken de tijd die nodig is om te bewerkstelligen dat de maximale temperatuur in het bolletje $12\,^{\circ}\mathrm{C}$ is.

c. Bereken de hiervoor vereiste hoogte van de waterkolom.

**Opgave 20.** 15 april 2011

Een hot-wire anemometer is een apparaatje om de snelheid in een gas- of vloeistofstroming te meten. Het bestaat in essentie uit een dun draadje, meestal gemaakt van platina, dat elektrisch verhit wordt en door de stroming dwars wordt aangestroomd (d.w.z. de richting van de stroming staat loodrecht op de lengte-as van het draadje). De temperatuur van het draadje wordt bepaald door de weerstand van het draadje te meten.

Het platina draadje is $1.5\,\mathrm{cm}$ lang en heeft een diameter $D$ van $0.25\,\mathrm{mm}$. Het wordt in een luchtstroom gehangen (dwars op de stroomrichting); de luchtsnelheid is $v$. De temperatuur van de aanstromende lucht is $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ en de druk is $1\,\mathrm{bar}$. Aan het draadje wordt een elektrisch vermogen van $1.5\,\mathrm{W}$ toegevoerd. De temperatuur van het draadje is over de gehele lengte $320\,^{\circ}\mathrm{C}$. De toestand is stationair.

a. Stel een energiebalans op over het draadje en bereken hieruit de warmteoverdrachtscoëfficiënt $h$ en het daaruit afgeleide nusseltgetal.

b. Hoe luidt hier het verband tussen $\mathit{Nu}$, $\mathit{Re}$ en $\mathit{Pr}$? Controleer of $\mathit{Re}$ in het vereiste interval ligt.

c. Bereken de luchtsnelheid $v$.

Gegevens: lucht bij $T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$, $p = 1\,\mathrm{bar}$:
$\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$, $\lambda = 0.0257\,\mathrm{W/m\,K}$, $\mu = 1.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{N\,s/m^2}$, $\mathit{Pr} = 0.71$.

**Opgave 21.** 15 april 2011

Van een laminaire stroming door een ronde buis zijn $\mathit{Re} = 100$, $\mathit{Pr} = 7$ alsmede de lengte-diameter verhouding van de buis $L/D = 350$ bekend. Aan het begin van de buis is de gemiddelde temperatuur van de vloeistof gelijk aan $T_0$. De wandtemperatuur van de buis wordt over de gehele lengte op $T_\mathrm{w}$ gehouden. We veronderstellen dat de warmte-overdracht over de gehele buislengte thermisch is ingesteld.

a. Bereken het nusseltgetal $Nu$.

b. Leid een uitdrukking af voor de dimensieloze gemiddelde temperatuur aan het eind van de buis: $\dfrac{T_\mathrm{w} - < T_L >}{T_\mathrm{w} - T_0}$ en herschrijf dit gebruik makend van de gegeven en berekende dimensieloze parameters.

c. Bereken de dimensieloze gemiddelde temperatuur aan het eind van de buis:

**Opgave 22.** 15 april 2011

Een wand met warmtevereffeningscoëfficiënt $a$ en dikte $R$ heeft aanvankelijk temperatuur $T_0$ en wordt vanaf $t = 0$ op $x = 0$ op een temperatuur $T_1$ gehouden. Op $x = R$ is de wand geïsoleerd en is de warmtestroomdichtheid gelijk aan nul. Voor een half-oneindig medium ($x > 0$) is de oplossing voor de (dimensieloze) temperatuur gegeven als:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\,t}}\right) = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\,t}}\right)$$

Zie pagina 42 in de 'Data Companion' voor getabelleerde waarden.

a. Bereken met behulp van de penetratietheorie de dimensieloze temperatuur $\theta$ op $x = R$ voor het geval: $2\sqrt{a\,t} = R$.

b. Bepaal deze temperatuur tevens met behulp van de zogenaamde doorverwarmingsgrafieken uit de 'Data Companion'.

**Opgave 23.** 4 april 2012

Een massief glazen bol ($a_\mathrm{g} = 4.4 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}$ en $\lambda_\mathrm{g} = 0.8\,\mathrm{W/m\,K}$) met een diameter $D = 0.2\,\mathrm{m}$ heeft aanvankelijk een temperatuur $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$. Nu stijgt plotseling de temperatuur van de omgeving naar $T_1 = 30\,°\mathrm{C}$. De warmteoverdrachtscoëfficiënt voor warmtetransport van de omgeving naar de bol is $h = 10\,\mathrm{W/m^2\,K}$.

Een student realiseerde zich dat het opwarmingsproces wat langzamer zou verlopen als gegeven in de doorverwarmingsgrafieken en bedacht de volgende formule voor de berekening van de dimensieloze tijd $Fo$ nodig voor het bereiken van een bepaalde (dimensieloze) gemiddelde temperatuur.

$$Fo = Fo_\infty + \frac{\lambda_\mathrm{g}}{h\,D}\,\frac{V}{A\,D}\,\ln\left(\frac{T_0 - T_1}{\langle T\rangle - T_1}\right)$$

In deze formule is $Fo_\infty$ de waarde die kan worden afgelezen in de doorverwarmingsgrafiek voor een gegeven dimensieloze gemiddelde temperatuur, $V$ is het volume van de bol en $A$ het oppervlak.

Voor een verwaarloosbare externe warmteoverdrachtscoëfficiënt, $h \to \infty$, nadert de formule tot $Fo = Fo_\infty$, ofwel zegt ze dat dan gewoon de doorverwarmingsgrafiek kan worden gebruikt. Voor het geval $h \to 0$ is de term met $Fo_\infty$ verwaarloosbaar en vinden we

$$Fo = \frac{a_\mathrm{g}\,t}{D^2} = \frac{\lambda_\mathrm{g}\,t}{\rho\,c_p\,D^2} = \frac{\lambda_\mathrm{g}}{h\,D}\,\frac{V}{A\,D}\,\ln\left(\frac{T_0 - T_1}{\langle T\rangle - T_1}\right) \quad \text{ofwel} \quad \frac{\langle T\rangle - T_1}{T_0 - T_1} = \exp\left(-\frac{h\,A\,t}{\rho\,c_p\,V}\right)$$

Dit is de bekende oplossing bij een verwaarloosbare interne warmteoverdrachtscoëfficiënt. De gegeven formule kan gezien worden als interpolatie tussen deze twee uitersten.

**a. 2 punten** Bereken, met het 'recept' van de student, hoelang het duurt totdat de gemiddelde temperatuur in de glazen bol gestegen is tot $\langle T\rangle = 29\,°\mathrm{C}$.

**b. 4 punten** Bereken deze tijd ook door middel van het optellen van inwendige en uitwendige warmteweerstanden.

**Opgave 24.** 4 april 2012

Door een horizontale stalen pijp met een inwendige diameter $D_\mathrm{i} = 0.10\,\mathrm{m}$ en een uitwendige diameter $D_\mathrm{u} = 0.12\,\mathrm{m}$ stroomt water met een snelheid $\langle v \rangle = 0.16\,\mathrm{m/s}$. De pijp heeft een lengte $L = 20.\,\mathrm{m}$. De omringende lucht heeft een temperatuur gelijk aan $T_\mathrm{u} = 20\,^\circ\mathrm{C}$, de temperatuur van het water aan de ingang van de pijp is $T_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}$. De toestand is stationair. Verder is gegeven:

| | | | |
|---|---|---|---|
| uitwendige warmteoverdrachtscoëfficiënt | $h_\mathrm{u}$ | $=$ | $93\,\mathrm{W/m^2\,K}$ |
| warmtegeleidingscoëfficiënt van staal | $\lambda_\mathrm{s}$ | $=$ | $50\,\mathrm{W/m\,K}$ |
| warmtegeleidingscoëfficiënt van water | $\lambda_\mathrm{w}$ | $=$ | $0.625\,\mathrm{W/m\,K}$ |
| viscositeit van water | $\mu_\mathrm{w}$ | $=$ | $10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$ |
| dichtheid van water | $\rho_\mathrm{w}$ | $=$ | $10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ |
| soortelijke warmte van water | $c_p$ | $=$ | $4.2\,\mathrm{kJ/kg\,K}$ |

De gegeven grootheden kunnen onafhankelijk van de temperatuur worden gedacht.

**a. 4 punten** Bereken de totale warmteoverdrachtscoëfficiënt $U$, betrokken op de uitwendige diameter $D_\mathrm{u}$. Hou hierbij rekening met de kromming van de buiswand.

**b. 3 punten** Beschouw de pijp als een warmtewisselaar en bereken de uitgangstemperatuur $T_L$.

**Opgave 25.** 27 juni 2012

Een warmtewisselaar bestaat uit een bundel horizonale pijpen. Hierdoor stroomt water, dat ten behoeve van verwarmingsdoeleinden moet worden opgewarmd. De begintemperatuur van het water is $T_0 = 70\,^\circ\mathrm{C}$. De opwarming geschiedt met behulp van rookgassen, die in verticale richting langs de buizen stromen en een temperatuur van $T_\mathrm{g} = 400\,^\circ\mathrm{C}$ hebben. Teneinde de totale warmteoverdrachtscoëfficiënt voor de warmteoverdracht van het rookgas naar het water te bepalen, vangt men de vloeistof van één buis gedurende een zekere tijd op in een mengvaatje, dat direkt achter de buis geplaatst is. Tijdens deze proef is het gehele proces stationair. We veronderstellen deze totale warmteoverdrachtscoëfficiënt onafhankelijk van de plaats in de warmtewisselaar. Bij de proef blijkt de temperatuur in het vaatje na mengen $T_L = 90\,^\circ\mathrm{C}$ te zijn en de snelheid in een pijp (berekend uit de toename van de hoeveelheid water in het mengvaatje gedeeld door het oppervlak van de dwarsdoorsnede van de pijp) bedraagt $0.12\,\mathrm{m/s}$.

**a. 3 punten** Geef twee vergelijkingen voor de aan de buis overgedragen totale hoeveelheid warmte en bereken hiermee de totale warmteoverdrachtscoëfficiënt $U$, betrokken op de inwendige diameter.

Gegeven (de watereigenschappen zijn geldig tussen $70\,^\circ\mathrm{C}$ en $90\,^\circ\mathrm{C}$):

| | | | |
|---|---|---|---|
| $L$ | pijplengte | $0.60$ | $\mathrm{m}$ |
| $D$ | pijpdiameter inwendig | $0.04$ | $\mathrm{m}$ |
| $\rho$ | dichtheid | $960$ | $\mathrm{kg/m^3}$ |
| $c_p$ | soortelijke warmte | $4000$ | $\mathrm{J/kg\,K}$ |

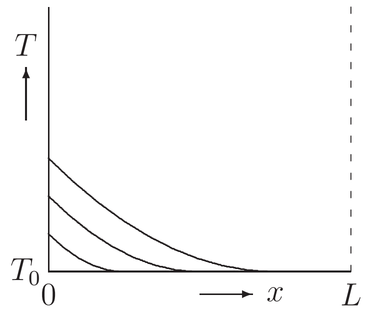
Om een indruk te krijgen van de grootte van de afzonderlijke warmteoverdrachtscoëfficiënten (van het rookgas naar de pijpwand en van de pijpwand naar het water, waarbij de geleidingsweerstand van de pijpwand zelf mag worden verwaarloosd), herhaalt men de proef bij een tweemaal zo hoge vloeistofsnelheid in de buizen. Men vindt nu, nadat het proces onder deze verhoogde snelheid weer de stationaire toestand heeft bereikt, dat de temperatuur in het mengvaatje maar $81.5\,^\circ\mathrm{C}$ wordt.

**b. 3 punten** Bereken, aannemende dat steeds $Re > 10^4$, hieruit de grootte van de beide partiële warmteoverdrachtscoëfficiënten van het eerste geval ($90\,^\circ\mathrm{C}$ in het mengvaatje en een vloeistofsnelheid van $0.12\,\mathrm{m/s}$. Beide partiële warmteoverdrachtscoëfficiënten worden onafhankelijk van de plaats in de warmtewisselaar gesteld en zijn betrokken op de inwendige diameter.

N.B.: Het is de bedoeling, dat dit vraagstuk wordt opgelost zonder overige watereigenschappen uit de 'Data Companion' te gebruiken.

**Opgave 26.** 27 juni 2012

Wanneer bij een halfoneindig medium ($0 \leq x \leq \infty$) vanaf een tijdstip $t = 0$ een constante warmtestroomdichtheid $\phi_q''$ het medium met aanvankelijke temperatuur $T_0$ ingaat kan voor de wandtemperatuur op $x = 0$ als functie van de tijd worden afgeleid:

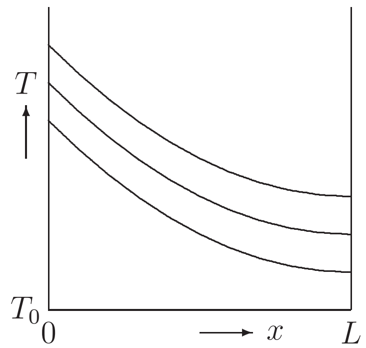



$$T(0,t) - T_0 = \phi_q'' \sqrt{\frac{4\,t}{\pi\,\lambda\,\rho\,c_p}}$$

In deze vergelijking is $\lambda$ de warmtegeleidingscoëfficiënt, $\rho$ de dichtheid en $c_p$ de soortelijke warmte. In een eindig medium $0 \leq x \leq L$ zijn deze vergelijkingen bruikbaar zolang $Fo < 0.1$.

**a. 1 punt** Leid een vergelijking af voor de penetratiediepte $\delta$, wanneer deze bij de hier geldende randvoorwaarden ook wordt gedefinieerd met behulp van de raaklijn aan het temperatuurprofiel op $x = 0$.

Wanneer bij een eindig medium ($0 \leq x \leq L$) vanaf een bepaald tijdstip een constante warmtestroomdichtheid $\phi_q''$ het medium met aanvankelijke temperatuur $T_0$ ingaat ontstaat er voor lange tijden een parabolisch temperatuurprofiel in de wand dat in zijn geheel met een constante opwarmsnelheid $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ naar hogere temperaturen schuift.




$$T(x,t) - T(L,t) = \frac{\phi_q'' L}{2\,\lambda} \left( \frac{x^2}{L^2} - \frac{2\,x}{L} + 1 \right)$$

**b. 1 punt** Laat zien, dat

$$\int_0^L (T(x,t) - T(L,t))\,\mathrm{d}x = \frac{\phi_q'' L^2}{6\,\lambda} = (T(0,t) - T(L,t))\,\frac{L}{3}$$

Een sandwich-constructiematriaal bestaat uit een grote dunne plaat ijzer (dikte $L_1 = 5\,\mathrm{mm}$) met daarop een dubbel zo dikke ($L_2 = 10\,\mathrm{mm}$) laag asfalt. Oorspronkelijk is de temperatuur in beide materialen gelijk aan $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Vanaf het tijdstip $t = 0$ wordt door middel van verwaarloosbaar dunne elektrische stookdraden in het grensvlak tussen ijzer en asfalt een elektrisch vermogen van $200\,\mathrm{W/m^2}$ in warmte omgezet. Aan de buitenzijden is de sandwich geïsoleerd en daar dus de warmtestroomdichtheid gelijk aan nul.

**c. 1 punt** Bereken voor korte tijden de verhouding van de warmtestromen die het ijzer en asfalt ingaan.

**d. 1 punt** Geef op het tijdstip $t = 0.1\,\mathrm{s}$ de temperatuur $T_\mathrm{w}$ op het grensvlak tussen ijzer en asfalt.

**e. 1 punt** Na lange tijd wordt een 'stationaire' toestand bereikt, waarbij de temperaturen in beide materialen met gelijke en constante opwarmsnelheid stijgen. Bereken voor lange tijden de verhouding $\gamma$ van de warmtestroomdichtheden die het ijzer en asfalt ingaan.

**f. 1 punt** Leid voor lange tijden een symbolische uitdrukking af voor de temperatuur $T_\mathrm{w}$ op het grensvlak tussen ijzer en asfalt.

# Uitwerkingen hoofdstuk 3

## Opgave 1.

Stromend water:

$$Re = \frac{\rho_{\mathrm{w}}\, v\, D}{\mu_{\mathrm{w}}} = 2.0\, \times\, 10^3$$

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu_{\mathrm{w}}\, c_{p,\mathrm{w}}}{\lambda_{\mathrm{w}}} = 7$$

De warmteoverdracht aan de buitenzijde van de cilinder wordt beschreven met een nusseltgetal

$$Nu = 0.57\, Re^{0.5}\, Pr^{0.33} = 48.45$$

waaruit dan volgt voor de warmteoverdrachtscoëfficiënt:

$$h = \frac{\lambda_{\mathrm{w}}}{D}\, Nu = 7.27\, \times\, 10^3\, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}$$

a. Glazen cilinder:

$$\frac{\text{inwendige weerstand}}{\text{uitwendige weerstand}} = \frac{D/\lambda_{\mathrm{g}}}{1/h} = 37$$

Koperen cilinder:

$$\frac{\text{inwendige weerstand}}{\text{uitwendige weerstand}} = \frac{D/\lambda_{\mathrm{k}}}{1/h} = 0.073$$

b. Glazen cilinder: warmteweerstand in het glas. Dan gebruiken we de doorverwarmingsgrafieken. Voor

$$\frac{T_{\mathrm{w}} - T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{w}} - T_0} = \frac{15-16}{15-25} = 0.1 \;\; \text{lezen we af:} \;\; Fo = 0.12$$

Daarmee wordt:

$$t = Fo\, \frac{D^2\, \rho_{\mathrm{g}}\, c_{p,\mathrm{g}}}{\lambda_{\mathrm{g}}} = 4.8\,\mathrm{s}$$

Koperen cilinder: warmteweerstand in het water. Met een balans over een lengte $L$ van de cilinder:

$$\rho_{\mathrm{k}}\, c_{p,\mathrm{k}}\, \frac{\pi}{4}\, D^2\, L\, \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = h\, \pi\, D\, L\, (T - T_{\mathrm{w}})$$

krijgen we

$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_{\mathrm{w}}} = -\frac{4\,h}{\rho_{\mathrm{k}}\, c_{p,\mathrm{k}}\, D}\, \mathrm{d}t$$

Na integratie volgt $t$ dan uit:

$$t = \frac{\rho_{\mathrm{k}}\, c_{p,\mathrm{k}}\, D}{4\,h}\, \ln\left(\frac{T_0 - T_{\mathrm{w}}}{T - T_{\mathrm{w}}}\right) = 1.0\,\mathrm{s}$$

## Opgave 2.

a. Voor de warmteweerstand van een bolschil (= twee halve bolschillen) tussen binnenstraal $R_1 = D/2$ en buitenstraal $R_2 = D$ is afgeleid:

$$R_{\mathrm{w,bol}} = \frac{1}{4\,\pi\,\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{4\,\pi\,\lambda}\left(\frac{2}{D} - \frac{1}{D}\right) = \frac{1}{4\,\pi\,D\,\lambda}$$

en voor een eindige cilinderschil met dezelfde binnen- en buitenstraal en lengte $L = 2\,D$:

$$R_{\mathrm{w,cil}} = \frac{1}{2\,\pi\,L\,\lambda}\,\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{1}{4\,\pi\,D\,\lambda}\,\ln 2$$

De totale warmtestroom wordt nu gegeven door:

$$\phi_q = \frac{\Delta T}{R_{\mathrm{w,bol}}} + \frac{\Delta T}{R_{\mathrm{w,cil}}} = 4\,\pi\,D\,\lambda\,\Delta T\,\left(1 + \frac{1}{\ln 2}\right) = 2.46\,\mathrm{W}$$

De voor $1\,\mathrm{kg}$ benodigde smeltwarmte bedraagt $\Delta H_{\mathrm{sf}} = 333\,\mathrm{kJ}$. De benodigde tijd wordt nu: $\Delta t = \dfrac{\Delta H_{\mathrm{sf}}}{\phi_q} = \dfrac{333\,\times\,10^3}{2.46} = 1.356\,\times\,10^5\,\mathrm{s} = 37.7\,\mathrm{h}$

**Opgave 3.**

**Proef 1:** Bij het opwarmen in water geldt:

$$\frac{T_1 - \langle T \rangle}{T_1 - T_0} = \frac{70 - 65}{70 - 20} = 0.1$$

Aflezen in de doorverwarmingsgrafiek van de gemiddelde temperatuur geeft dan:

$$Fo_1 = \frac{\lambda}{\rho\,c_p}\,\frac{t_1}{D^2} = 0.046$$

**Proef 2:** Bij het afkoelen in lucht geldt:

$$\exp\left(-\frac{6\,h_{\mathrm{u}}\,t_2}{D\,\rho\,c_p}\right) = \frac{T_1 - \langle T \rangle}{T_1 - T_0} = \frac{20 - 25}{20 - 70} = 0.1$$

De uitwendige warmteoverdrachtscoëfficiënt $h_{\mathrm{u}}$ wordt bepaald door de relatie

$$Nu = \frac{h_{\mathrm{u}}\,D}{\lambda_{\mathrm{lucht}}} = 2$$

De warmtegeleidingscoëfficiënt van alcohol volgt dan uit:

$$\lambda = \frac{6\,Nu\,Fo_1}{\ln 10}\,\frac{t_2}{t_1}\,\lambda_{\mathrm{lucht}} = 0.16\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}$$

**Opgave 4.**

Omdat de vloer hier goed is geïsoleerd kan de hooiberg nog worden gespiegeld en kunnen we dit probleem behandelen als was het een volledige bol.

a. In de bol kan het verband tussen warmtestroom en temperatuurgradiënt worden geschreven als:

$$\phi_q(r) = -4\,\pi\,r^2\,\lambda\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$$

De warmtebalans over een bolschil tussen $r$ en $r + \mathrm{d}r$ wordt dan:

$$0 = \phi_q(r) - \phi_q(r + \mathrm{d}r) + 4\,\pi\,r^2\,Q_0'''\,\mathrm{d}r$$

en vervolgens:

$$0 = \lambda\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) + r^2\,Q_0'''$$

Eenmaal integreren geeft dan:

$$r^2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{Q_0'''}{3\,\lambda} r^3 + C_0$$

Omdat voor $r = 0$ als randvoorwaarde geldt dat $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = 0$ is ook $C_0 = 0$. We houden dan over:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{Q_0'''}{3\,\lambda} r$$

Een wat eenvoudiger afleiding van dit tussenresultaat kan worden verkregen door een warmtebalans op te stellen over de kern van de bol met straal $r$. De in een kern van de bol met straal $r$ geproduceerde warmte kan worden geschreven als:

$$Q(r) = \frac{4}{3}\pi\, r^3\, Q_0'''$$

Dit vermogen wordt door geleiding afgevoerd, dus

$$Q(r) = -\lambda\, 4\,\pi\, r^2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$$

en kan worden herschreven als

$$\mathrm{d}T = -\frac{Q_0'''}{3\,\lambda} r\, \mathrm{d}r$$

Dit is hetzelfde als hierboven verkregen met een balans over een bolschil. Integratie hiervan geeft

$$T = -\frac{Q_0'''}{6\,\lambda} r^2 + C_1$$

Uit de randvoorwaarde volgt voor de integratieconstante $C_1 = T_\mathrm{w} + \frac{Q_0'''}{6\,\lambda} R^2$ wat resulteert in:

$$T - T_\mathrm{w} = \frac{Q_0'''}{6\,\lambda}\left(R^2 - r^2\right)$$

b. Invullen van de gegevens geeft tenslotte voor $T_\mathrm{c}$, de temperatuur in het midden: $T_\mathrm{c} - T_\mathrm{w} = 208.3\,\mathrm{K}$.

**Opgave 5.**

a. Een eenvoudige warmtebalans geeft direct, dat het koude water wordt opgewarmd tot $60\,^\circ\mathrm{C}$.

b. De overgedragen hoeveelheid warmte wordt dan:

$$\phi_q = \phi_m\, c_p\, \Delta T = \frac{48000}{3600} 4180 \times 35 = 1.95 \times 10^6\,\mathrm{W}$$

c. Voor de meestroomwarmtewisselaar vinden we:

$$\Delta T_\mathrm{ln} = \frac{5 - 75}{\ln(5/75)} = 25.85\,\mathrm{K}$$

en voor de tegenstroomwarmtewisselaar:

$$\Delta T_\mathrm{ln} = 40\,\mathrm{K}$$

Met $\phi_q = U\, A\, \Delta T_\mathrm{ln}$ vinden we dan voor het warmtewisseland oppervlak bij meestroom $A = 37.7\,\mathrm{m}^2$ en bij tegenstroom $A = 24.4\,\mathrm{m}^2$.

**Opgave 6.**

a. In de bol kan het verband tussen warmtestroom en temperatuurgradiënt worden geschreven als:

$$\phi_q(r) = -4\,\pi\,r^2\,\lambda\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$$

De warmtebalans over een bolschil tussen $r$ en $r + \mathrm{d}r$ wordt dan:

$$0 = \phi_q(r) - \phi_q(r + \mathrm{d}r) + 4\,\pi\,r^2\,Q'''\,\mathrm{d}r$$

en vervolgens:

$$0 = \lambda\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) + r^2\,Q'''$$

Eenmaal integreren geeft dan:

$$r^2\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{Q'''}{3\,\lambda}\,r^3 + C_0$$

Omdat voor $r = 0$ als randvoorwaarde geldt dat $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = 0$ is ook $C_0 = 0$. We houden dan over:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{Q'''}{3\,\lambda}\,r$$

Een wat eenvoudiger afleiding van dit tussenresultaat kan worden verkregen door een warmtebalans op te stellen over de kern van de bol met straal $r$. De in een kern van de bol met straal $r$ geproduceerde warmte kan worden geschreven als:

$$Q(r) = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,Q'''$$

Dit vermogen wordt door geleiding afgevoerd, dus

$$Q(r) = -\lambda\,4\,\pi\,r^2\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$$

en kan worden herschreven als

$$\mathrm{d}T = -\frac{Q'''}{3\,\lambda}\,r\,\mathrm{d}r$$

Dit is hetzelfde als hierboven verkregen met een balans over een bolschil.

b. Integratie hiervan geeft

$$T = -\frac{Q'''}{6\,\lambda}\,r^2 + C_1$$

Uit de randvoorwaarde volgt voor de integratieconstante $C_1 = T_\mathrm{w} + \dfrac{Q'''}{6\,\lambda}\,R^2$ wat resulteert in:

$$T - T_\mathrm{w} = \frac{Q'''}{6\,\lambda}\,\left(R^2 - r^2\right)$$

Invullen van de gegevens geeft tenslotte voor $T_\mathrm{c}$, de temperatuur in het midden: $T_\mathrm{c} = 1270\,^\circ\mathrm{C}$.

**Opgave 7.**

a. De overgedragen warmte kan op twee manieren worden geschreven:

$$\phi_q = \phi_m\, c_p\, (T_2 - T_1)$$

$$\phi_q = h\, L\, \pi\, D\, \Delta T_{\mathrm{ln}} = h\, L\, \pi\, D\, \frac{T_{\mathrm{w}} - T_1 - (T_{\mathrm{w}} - T_2)}{\ln\left(\frac{T_{\mathrm{w}}-T_1}{T_{\mathrm{w}}-T_2}\right)}$$

Hieruit volgt direct het gevraagde verband.

b.

$$h \propto \frac{Nu}{D} \propto \left(\frac{\phi_m}{D}\right)^{0.8} \frac{1}{D} = \frac{{\phi_m}^{0.8}}{D^{1.8}} \quad \Rightarrow \quad L \propto {\phi_m}^{0.2}\, D^{0.8}$$

1.

$$\frac{L + \Delta L}{L} = 2^{0.8} = 1.74$$

2.

$$\frac{L + \Delta L}{L} = 2^{0.2} = 1.15$$

3.

$$\frac{L + \Delta L}{L} = 2^{1.0} = 2$$

**Opgave 8.**

a. Met behulp van de penetratietheorie, zie Voorbeeld 3.2 uit het boek, wordt het verband tussen de grensvlaktemperatuur $T_{\mathrm{g}}$ en de oorspronkelijk temperaturen van de twee materialen die op $t = 0$ contact met elkaar maken gegeven door:

$$T_{\mathrm{g}} = \frac{\dfrac{\lambda_{\mathrm{a}}}{\sqrt{a_{\mathrm{a}}}} T_{0\mathrm{a}} + \dfrac{\lambda_{\mathrm{b}}}{\sqrt{a_{\mathrm{b}}}} T_{0\mathrm{b}}}{\dfrac{\lambda_{\mathrm{a}}}{\sqrt{a_{\mathrm{a}}}} + \dfrac{\lambda_{\mathrm{b}}}{\sqrt{a_{\mathrm{b}}}}} = \frac{\sqrt{\lambda_{\mathrm{a}}\, \rho_{\mathrm{a}}\, c_{p\mathrm{a}}}\, T_{0\mathrm{a}} + \sqrt{\lambda_{\mathrm{b}}\, \rho_{\mathrm{b}}\, c_{p\mathrm{b}}}\, T_{0\mathrm{b}}}{\sqrt{\lambda_{\mathrm{a}}\, \rho_{\mathrm{a}}\, c_{p\mathrm{a}}} + \sqrt{\lambda_{\mathrm{b}}\, \rho_{\mathrm{b}}\, c_{p\mathrm{b}}}}$$

We kiezen hier 'a' voor varkensvlees en 'b' voor ijzer. Met uit de 'Data Companion': $\lambda_{\mathrm{b}} = 80.4\,\mathrm{W/m\,K}$, $\rho_{\mathrm{b}} = 7870\,\mathrm{kg/m^3}$, $c_{p\mathrm{b}} = 4690\,\mathrm{J/kg\,K}$, $a_{\mathrm{b}} = 0.022 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^2/s}$, $\lambda_{\mathrm{a}} = 0.46\,\mathrm{W/m\,K}$ en $c_{p\mathrm{a}} = 2900\,\mathrm{J/kg\,K}$ en veronderstellend $T_{\mathrm{g}} = 0\,^\circ\mathrm{C}$ en $T_{0\mathrm{a}} = 37\,^\circ\mathrm{C}$ wordt dan gevonden voor de maximum temperatuur van de brugleuning: $T_{0\mathrm{b}} = -.78\,^\circ\mathrm{C}$. Er zijn dus geen extreem lage temperaturen van de brugleuning nodig voor het beschreven effect.

b. Een grove schatting voor de benodigde tijd halen we uit de penetratiediepte:

$$t = \frac{L^2}{\pi\, a_{\mathrm{b}}} \approx 3.6 \times 10^3\,\mathrm{s}$$

Deze, laten we zeggen, fysische methode leidt niet tot een aanvaardbaar resultaat. Een wat meer chemisch gerichte aanpak met alcohol als anti-vries zal tot een snellere oplossing van het probleem leiden.

**Opgave 9.**

a. De per $\mathrm{m}^2$ geproduceerde warmte wordt via een warmteoverdrachtscoëfficiënt naar de olie afgevoerd:

$$W\,d = h\,(T_d - T_0) \quad\rightarrow\quad T_d = T_0 + \frac{W\,d}{h}$$

b. Op het grensvlak is de aangevoerde warmte gelijk aan de afgevoerde:

$$\phi_q{}'' = -\lambda\,\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=d} = h\,(T_d - T_0)$$

c. De warmtebalans over een plakje $\mathrm{d}x$ met oppervak van $1\,\mathrm{m}^2$:

$$0 = -\lambda\,\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x} + \lambda\,\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x+\mathrm{d}x} + W\,\mathrm{d}x$$

$$-\lambda\,\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = W \quad\rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{W}{\lambda}\,x + C_1$$

Voor $x = 0$ is $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0$, dus $C_1 = 0$. We houden dan over:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{W}{\lambda}\,x$$

Dit hadden we ook direct kunnen opschrijven uit een balans over een plak tussen $0$ en $x$. Integratie geeft dan:

$$T = -\frac{1}{2}\,\frac{W}{\lambda}\,x^2 + C_2$$

Voor $x = d$ is $T = T_d$ en dus $C_2 = T_d + \frac{1}{2}\,\frac{W}{\lambda}\,d^2$ en daarmee:

$$T = T_d + \frac{1}{2}\,\frac{W}{\lambda}\,\left(d^2 - x^2\right) = T_0 + \frac{W\,d}{h} + \frac{W}{2\,\lambda}\,\left(d^2 - x^2\right)$$

d. De maximale temperatuur wordt gevonden daar waar de afgeleide nul is, dus voor $x = 0$:

$$T_{\mathrm{max}} = T_0 + \frac{W\,d}{h} + \frac{W\,d^2}{2\,\lambda}$$

**Opgave 10.**

a. Voor korte tijden is op tijdstip $t$:

$$h_{\mathrm{i}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi\,a\,t}}, \quad \text{met} \quad a = \frac{\lambda}{\rho\,c_p}$$

De over de tijd gemiddelde warmteoverdrachtscoëfficiënt: $\langle h\rangle = 2\,h_{\mathrm{i}}$. Een over de tijd geïntegreerde warmtebalans geeft dan:

$$2\,\sqrt{\frac{\lambda\,\rho\,c_p\,t}{\pi}}\,A\,(T_1 - T_0) = \rho\,c_p\,V\,(\langle T\rangle - T_0)$$

Dit resulteert in:

$$\frac{\langle T\rangle - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{A}{V}\,\sqrt{\frac{\lambda\,t}{\rho\,c_p}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{A}{V}\,\sqrt{a\,t}$$

b. Met een warmtebalans vinden we analoog aan de afleiding in onderdeel 3.3.4 of 3.3.5 in het boek:

$$\frac{\langle T\rangle - T_1}{T_0 - T_1} = \exp\left(-\frac{h_{\mathrm{u}}\,A\,t}{\rho\,c_p\,V}\right)$$

**Opgave 11.**

a.
$$Re = \frac{\rho\, v\, D}{\mu} = \frac{4\,\phi_V\,\rho}{\pi\, D\,\mu} = \frac{4\,(1./3600)\,988.1}{\pi\, 0.01\, 0.546\,\times\,10^{-3}} = 64\,\times\,10^3$$

De stroming is turbulent en heeft tengevolge daarvan een constante warmteoverdrachtscoëfficiënt.

b. Uit ervaring weten we dat het temperatuurverloop exponentieel is:

$$\frac{T(x) - T_0}{T_1 - T_0} = \exp(-C\,x)$$

$C$ is een constante die onder andere afhangt van de warmteoverdrachtscoëfficiënt. Zonder ervaring zouden we dit moeten afleiden. Voor $x = 3\,\mathrm{m}$ geeft dit:

$$\frac{40 - 20}{70 - 20} = \exp(-3\,C)$$

en voor de gewenste lengte $L$:

$$\frac{30 - 20}{70 - 20} = \exp(-L\,C)$$

Daaruit volgt:

$$L = 3\,\frac{\ln 5}{\ln 2.5} = 5.27\,\mathrm{m}$$

**Opgave 12.**

a. Er geldt:
$$\phi_q = (\phi_m\, c_p)_{\mathrm{b}}\;(T_3 - T_1) = (\phi_m\, c_p)_{\mathrm{w}}\;(T_2 - T_4)$$
Omdat gegeven is dat $T_3 - T_1 = T_2 - T_4$ zal $(\phi_m\, c_p)_{\mathrm{b}} = (\phi_m\, c_p)_{\mathrm{w}}$. Met tevens

$$\phi_q = U\,A\,\Delta T_{\ln}$$

vinden we met $\Delta T_{\ln} = 28\,\mathrm{K}$
$$U\,A = \frac{10}{7}\,\phi_m\, c_p$$

b. Nu geven de uitdrukkingen voor $\phi_q$ met $\Delta T_{\ln} = 88 - T_{\mathrm{b}}$:

$$\phi_m\, c_p\,(T_{\mathrm{b}} - 20) = 2\,U\,A\;(88 - T_{\mathrm{b}}) \quad\Rightarrow\quad T_{\mathrm{b}} = 70.4\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Dit is nog ruim onder het kookpunt van benzeen bij $80.1\,^{\circ}\mathrm{C}$. Het water zal in deze situatie verder afkoelen tot $37.6\,^{\circ}\mathrm{C}$.

**Opgave 13.**

Warmtebalans over elementje $\mathrm{d}x$

a. De langs de omtrek afgevoerde warmte bedraagt

$$\phi_{q0} = h_{\mathrm{u}}\,(T - T_0)\,\pi\, D\,\mathrm{d}x$$

Langs het linkervlak wordt aangevoerd

$$\phi_{q\mathrm{L}} = -\lambda\,\frac{\pi\, D^2}{4}\,\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x-\frac{\mathrm{d}x}{2}}$$

Langs het rechtervlak wordt afgevoerd

$$\phi_{q\mathrm{R}} = -\lambda \, \frac{\pi \, D^2}{4} \, \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+\frac{\mathrm{d}x}{2}}$$

De microwarmtebalans voor het elementje $\mathrm{d}x$ wordt dan:

$$0 = \phi_{q\mathrm{L}} - \phi_{q\mathrm{R}} - \phi_{q0} + P$$

De productieterm wordt hier dus gevormd door de som van de elektrische dissipatie en de langs de omtrek afgevoerde warmte. Na optellen en delen door $\mathrm{d}x$ leidt dit tot de differentiaalvergelijking

$$\lambda \, \frac{\pi \, D^2}{4} \, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h_\mathrm{u} \, \pi \, D \, T = -h_\mathrm{u} \, \pi \, D \, T_0 - \frac{4 \, \rho_\mathrm{el} \, I^2}{\pi \, D^2}$$

b. Dit heeft als particuliere oplossing een constante temperatuur

$$T = T_0 + \frac{4 \, \rho_\mathrm{el} \, I^2}{\pi^2 \, D^3 \, h_\mathrm{u}}$$

Het homogene deel van de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{4 \, h_\mathrm{u}}{\lambda \, D} \, T = 0$$

heeft als oplossing $\exp\left(\pm\sqrt{\frac{4 \, h_\mathrm{u}}{\lambda \, D}} \, x\right)$.

c. De algemene oplossing wordt dan:

$$T = T_0 + \frac{4 \, \rho_\mathrm{el} \, I^2}{\pi^2 \, D^3 \, h_\mathrm{u}} + A_1 \, \exp\left(+\sqrt{\frac{4 \, h_\mathrm{u}}{\lambda \, D}} x\right) + A_2 \, \exp\left(-\sqrt{\frac{4 \, h_\mathrm{u}}{\lambda \, D}} x\right)$$

De constanten $A_1$ en $A_2$ volgen dan nog uit de randvoorwaarden op $x = \pm L/2$. Als uiteindelijke oplossing kan dan worden geschreven:

$$T = T_0 + \frac{4 \, \rho_\mathrm{el} \, I^2}{\pi^2 \, D^3 \, h_\mathrm{u}} \left( 1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{4 \, h_\mathrm{u}}{\lambda \, D}} \, x\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{4 \, h_\mathrm{u}}{\lambda \, D}} \, \frac{L}{2}\right)} \right)$$

d. Voor de temperatuur in het midden van de draad geldt dan:

$$T_\mathrm{c} = T_0 + \frac{4 \, \rho_\mathrm{el} \, I^2}{\pi^2 \, D^3 \, h_\mathrm{u}} \left( 1 - \frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{4 \, h_\mathrm{u}}{\lambda \, D}} \, \frac{L}{2}\right)} \right)$$

Voor de dwars aangestroomde cilinder volgt de externe warmteoverdrachtscoëfficiënt $h_\mathrm{u}$ uit de relatie:

$$Nu = \frac{h_\mathrm{u} \, D}{\lambda} = 0.57 \, Re^{0.5} \, Pr^{0.33}$$

Hier is

$$Re = \frac{\rho\, v\, D}{\mu} = \frac{1.205\,\times\,1.2\,\times\,1.4\,\times\,10^{-3}}{1.82\,\times\,10^{-5}} = 111.2 \;\;\text{en}\;\; Pr = 0.713$$

en kan bovenstaande relatie worden toegepast: $Nu = 5.37$ en $h_\mathrm{u} = 98.6\,\mathrm{W/m^2\,K}$.

$$T_\mathrm{c} = 20.0 + 2.54\left(1 - \frac{1}{2.009}\right) = 21.3\,^\circ\mathrm{C}$$

**Opgave 14.**

a. Het massadebiet vinden we met:

$$Re = \frac{\rho\,\langle v\rangle\, D}{\mu} = \frac{4\,\phi_m}{\pi\, D\,\mu} \quad\Rightarrow\quad \phi_m = \frac{\pi}{4}\, D\,\mu\, Re = 0.07854\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

Voor een laminaire stroming wordt de warmteoverdrachtscoëfficiënt:

$$h_x = \frac{\lambda}{D}\, Nu_x = 1.08\,\frac{\lambda}{D}\, Gz^{-1/3} = 1.08\,\frac{\lambda}{D}\left(\frac{\rho\, c_p\,\langle v\rangle\, D^2}{\lambda\, x}\right)^{1/3} =$$

$$1.08\,\frac{\lambda}{D}\,\frac{C_0}{x^{1/3}} \;\;\text{met}\;\; C_0 = 57.54\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^{5/3}\,K}}$$

Dan kan de microbalans worden geschreven als:

$$0 = \phi_m\, c_p\left(\langle T\rangle_x - \langle T\rangle_{x+\mathrm{d}x}\right) + C_0\,\pi\, D\,\frac{\mathrm{d}x}{x^{1/3}}\left(T_\mathrm{w} - \langle T\rangle_x\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\langle T\rangle}{T_\mathrm{w} - \langle T\rangle} = \frac{C_0\,\pi\, D}{\phi_m\, c_p}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^{1/3}}$$

b. Integratie geeft:

$$\ln(T_\mathrm{w} - \langle T\rangle) = \frac{3\, C_0\,\pi\, D}{2\,\phi_m\, c_p}\, x^{2/3} + C_1$$

en met de beginvoorwaarde

$$\ln(T_\mathrm{w} - T_0) = C_1$$

wordt de gemiddelde temperatuur in de buis gegeven door:

$$\frac{T_\mathrm{w} - \langle T\rangle}{T_\mathrm{w} - T_0} = \exp\left(-\frac{3\, C_0\,\pi\, D}{2\,\phi_m\, c_p}\, x^{2/3}\right)$$

c. De lengte $L$ volgt nu uit:

$$L^{2/3} = -\frac{2\,\phi_m\, c_p}{3\, C_0\,\pi\, D}\,\ln\left(\frac{T_\mathrm{w} - \langle T\rangle}{T_\mathrm{w} - T_0}\right) \quad\Rightarrow\quad L = 2.07\,\mathrm{m}$$

Met deze lengte wordt nog aan de eis $Gz < 0.05$ voldaan:

$$Gz = \frac{\lambda\, L}{\rho\, c_p\,\langle v\rangle\, D^2} = \frac{\lambda\, L}{\mu\, c_p\, D\, Re} = 0.00296 < 0.05$$

**Opgave 15.**

a. De totale hoeveelheid overgedragen warmte bedraagt:

$$\phi_q = \frac{9080}{3600}\, 137.5 \times 10^3 = 346.806 \times 10^3\,\mathrm{W}$$

De buitendiameter

$$D_\mathrm{u} = D_\mathrm{i} + 2\,d = 25.3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

en het logarithmische temperatuursverschil:

$$\Delta T_\mathrm{ln} = \frac{(T_0 - T_0^\mathrm{w}) - (T_0 - T_L^\mathrm{w})}{\ln\left(\frac{T_0 - T_0^\mathrm{w}}{T_0 - T_L^\mathrm{w}}\right)} = \frac{2.3}{\ln\frac{16.7}{14.4}} = 15.52\,\mathrm{K}$$

b. De overgedragen warmte kan op twee manieren worden geschreven:

$$\phi_q = n\,\rho\,\frac{\pi}{4}\,D_\mathrm{i}^2\,\langle v\rangle\,c_p\,(T_L^\mathrm{w} - T_0^\mathrm{w}) \quad \Rightarrow \quad n = 72.08 = 72$$

c. en vervolgens als

$$\phi_q = h\,n\,\pi\,D_\mathrm{u}\,L\,\Delta T_\mathrm{ln} \quad \Rightarrow \quad L = 3.87\,\mathrm{m}$$

**Opgave 16.**

a. In de energiebalans zien we hoe de inwendige energie en daarmee de temperatuur $T$ van de koperen plaat verandert door de toegevoerde warmte.

$$\rho\,c_p\,d\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = (h_1 + h_2)(T_1 - T) \quad \Rightarrow$$

$$\ln\frac{T_1 - T_0}{T_1 - T} = \frac{h_1 + h_2}{\rho\,c_p\,d}\,t$$

b. Met $\rho = 8.96 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ en $c_p = 386\,\mathrm{J/kg\,K}$ vinden we voor $t$:

$$t = \frac{8.96 \times 10^3\,386\,0.0254}{28 + 57}\,\ln\frac{55}{11} = 1663\,\mathrm{s} \approx 27.7\,\mathrm{min}$$

**Opgave 17.**

a. (Zie Voorbeeld 3.2 uit onderdeel 3.3.2 van het boek.) De biet geven we index $\mathrm{b}$ en het water index $\mathrm{w}$. Met $T_\mathrm{g}$ de temperatuur op het grensvlak kan de warmtestroomdichtheid tussen bol en water voor (zeer) korte tijden worden geschreven als:

$$\phi_q'' = \frac{\lambda_\mathrm{b}}{\sqrt{\pi\,a_\mathrm{b}\,t}}\,(T_1 - T_\mathrm{g}) = \frac{\lambda_\mathrm{w}}{\sqrt{\pi\,a_\mathrm{w}\,t}}\,(T_\mathrm{g} - T_0)$$

waaruit gevonden wordt:

$$T_\mathrm{g} = \frac{\sqrt{\lambda_\mathrm{b}\,\rho_\mathrm{b}\,c_{p,\mathrm{b}}}\,T_1 + \sqrt{\lambda_\mathrm{w}\,\rho_\mathrm{w}\,c_{p,\mathrm{w}}}\,T_0}{\sqrt{\lambda_\mathrm{b}\,\rho_\mathrm{b}\,c_{p,\mathrm{b}}} + \sqrt{\lambda_\mathrm{w}\,\rho_\mathrm{w}\,c_{p,\mathrm{w}}}} = 61.3\,^\circ\mathrm{C}$$

b. De diameter van de biet volgt uit:

$$M = \frac{\pi}{6}\,\rho_\mathrm{b}\,D^3 \quad \Rightarrow \quad D = 0.0601\,\mathrm{m}$$

(Zie Voorbeeld 3.8 uit onderdeel 3.3.5 van het boek.) Met voor een bol $Nu_\mathrm{i} = 6.58$:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h} + \frac{1}{Nu_\mathrm{i}}\,\frac{D}{\lambda_\mathrm{b}} = \frac{1}{1702} + \frac{1}{6.58}\,\frac{0.0601}{0.519} = 0.0182\,\frac{\mathrm{m^2\,K}}{\mathrm{W}}$$

$$t = \frac{\rho_\mathrm{b}\,c_{p,\mathrm{b}}\,D}{6\,U}\,\ln\frac{T_0 - T_1}{T_0 - \langle T\rangle} = 2077\,\mathrm{s} = 34.6\,\mathrm{min}$$

**Opgave 18.**

a.

$$Re = \frac{\rho \, \langle v \rangle \, D}{\mu} = 2.0 \times 10^5 \quad \text{en} \quad Pr = \frac{\mu \, c_p}{\lambda} = 7.0$$

$h_\mathrm{i}$ volgt dan uit:

$$Nu = \frac{h_\mathrm{i} \, D}{\lambda} = 0.027 \, Re^{0.8} \, Pr^{0.33} = 0.027 \, (2 \times 10^5)^{0.8} \, 7^{0.33} = 893 \quad \Rightarrow$$

$$h_\mathrm{i} = 5360 \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \, K}} \quad \text{en} \quad \frac{1}{h_\mathrm{i}} = 18.7 \times 10^{-5} \, \frac{\mathrm{m^2 \, K}}{\mathrm{W}}$$

b. We noemen de gemiddelde watertemperatuur $T_0$, de temperatuur van de binnenwand $T_1$, de temperatuur van de buitenwand $T_2$ en de stoomtemperatuur $T_3$.

$$\phi_q = U \, \pi \, D \, L \, (T_3 - T_0)$$

$$\phi_q = h_\mathrm{i} \, \pi \, D \, L \, (T_1 - T_0)$$

$$\phi_q = \frac{2 \, \lambda \, \pi \, L}{\ln \dfrac{D + 2\,\delta}{D}} \, (T_2 - T_1)$$

$$\phi_q = h_\mathrm{u} \, \pi \, (D + 2\,\delta) \, L \, (T_3 - T_2)$$

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_\mathrm{i}} + \frac{D \, \ln \left( \dfrac{D + 2\,\delta}{D} \right)}{2\,\lambda} + \frac{D}{(D + 2\,\delta) \, h_\mathrm{u}}$$

c.

$$\frac{D \, \ln \left( \dfrac{D + 2\,\delta}{D} \right)}{2\,\lambda} = 9.805 \times 10^{-5} \, \frac{\mathrm{m^2 \, K}}{\mathrm{W}}$$

Eventueel kan dit benaderd worden met

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2 \times 10^{-3}}{20} = 10.0 \times 10^{-5} \, \frac{\mathrm{m^2 \, K}}{\mathrm{W}}$$

Dit resulteert in

$$h_\mathrm{u} = \frac{.1}{.104} \, \frac{1}{(50 - 9.8 - 18.7) \, 10^{-5}} = 4472. \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \, K}}$$

d.

$$\frac{1}{U} > \frac{D}{(D + 2\,\delta) \, h_\mathrm{u}}$$

$$50 \times 10^{-5} \, \frac{\mathrm{m^2 \, K}}{\mathrm{W}} > 21.5 \times 10^{-5} \, \frac{\mathrm{m^2 \, K}}{\mathrm{W}}$$

**Opgave 19.**

a. Voor de warmtevereffeningscoëfficiënt geldt:

$$a = \frac{\lambda}{\rho\, c_p} = 2.0 \times 10^{-7}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

b. Uit het debiet vinden we

$$Re = \frac{4}{\pi}\,\frac{\rho\,\phi_V}{\mu\,D} = 10.2$$

Het betreft hier dus een laminaire stroming. Het graetzgetal

$$Gr = \frac{a\,L}{\langle v\rangle\,D^2} = \frac{\pi\,a\,L}{4\,\phi_V} = 0.00196 < 0.05$$

zodat

$$h_{\mathrm{i}} = Nu\,\frac{\lambda}{D} = 1.08\,\left(\frac{\pi\,a\,x}{4\,\phi_V}\right)^{-1/3}\,\frac{\lambda}{D} = 1.08\,\left(\frac{\lambda^2\,\rho\,c_p\,\langle v\rangle}{D\,x}\right)^{1/3}$$

c. Een micro-energiebalans over een plakje $\mathrm{d}x$

$$0 = \rho\,c_p\,\phi_V\,(T_x - T_{x+\mathrm{d}x}) - h_{\mathrm{i}}\,(T_x - T_{\mathrm{w}})\pi\,D\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_{\mathrm{w}}} = -1.08\,\pi\,\frac{a}{\phi_V}\,\left(\frac{\pi\,a\,x}{4\,\phi_V}\right)^{-1/3}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln\frac{T - T_{\mathrm{w}}}{T_1 - T_{\mathrm{w}}} = -1.62\,\pi\,\frac{a}{\phi_V}\,\left(\frac{4\,\phi_V}{\pi\,a}\right)^{1/3}\,x^{2/3}$$

d.

$$\ln\frac{T_L - T_{\mathrm{w}}}{T_1 - T_{\mathrm{w}}} = -1.62\,\pi\,\frac{a}{\phi_V}\,\left(\frac{4\,\phi_V}{\pi\,a}\right)^{1/3}\,L^{2/3} = -0.1016$$

Voor een lengte $L = 10\,\mathrm{m}$ vinden we dan:

$$\frac{T_L - T_{\mathrm{w}}}{T_1 - T_{\mathrm{w}}} = 0.9034 \quad \Rightarrow \quad T_L = 73.7\,^{\circ}\mathrm{C}$$

**Opgave 20.**

a. Bij een temperatuur van $10\,^{\circ}\mathrm{C}$:

$$Re = \frac{\rho\,v_{\mathrm{s}}\,D}{\mu} = \frac{999.7 \times 0.44 \times 0.005}{.001307} = 1683 \quad \text{en} \quad Pr = 9.45$$

$$Nu_{\mathrm{e}} = 2.0 + 0.66\,Re^{0.50}\,Pr^{0.33} = 58.8 \quad \Rightarrow \quad h_{\mathrm{e}} = Nu_{\mathrm{e}}\,\frac{\lambda_{\mathrm{H_2O}}}{D} = 6816\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}$$

Voor een bol is

$$Nu_{\mathrm{i}} = \frac{2}{3}\,\pi^2 \quad \Rightarrow \quad h_{\mathrm{i}} = Nu_{\mathrm{i}}\,\frac{\lambda}{D} = 394.8\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}$$

b.

$$M = \frac{T_1 - T_{\mathrm{c}}}{T_1 - T_0} = \frac{10 - 12}{10 - 60} = 0.04$$

In de doorverwarmingsgrafiek lezen we dan af:

$$Fo = 0.10 \quad \Rightarrow \quad t = Fo\,\frac{\rho\,c_p\,D^2}{\lambda} = 18.33\,\mathrm{s}$$

c.

$$h = v_{\mathrm{s}}\,t = 0.44 \times 18.33 = 8.07\,\mathrm{m}$$

**Opgave 21.**

a. Het elektrisch toegevoerde vermogen wordt via convectie afgevoerd.

$$0 = P - h\,\pi\,D\,L\,\Delta T \quad \Rightarrow \quad h = \frac{P}{\pi\,D\,L\,\Delta T} = 424.4\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}} \quad \Rightarrow \quad Nu = \frac{h\,D}{\lambda} = 4.1285$$

b.

$$\text{Met} \quad Nu = 0.57\,Re^{1/2}\,Pr^{1/3} \quad \text{wordt} \quad Re = \frac{Nu^2}{0.57^2\,Pr^{2/3}} = 65.917$$

en is de gebruikte relatie voor $Nu$ toepasbaar.

c.

$$v = Re\,\frac{\mu}{\rho\,D} = 3.96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

**Opgave 22.**

a.

$$Gz = \frac{a\,L}{D^2\,v} = \frac{1}{Re\,Pr}\,\frac{L}{D} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad Nu = 3.66$$

b. In Voorbeeld 3.9 uit het boek is afgeleid:

$$\ln\frac{T_\mathrm{w} - < T_L >}{T_\mathrm{w} - T_0} = -\frac{4\,h}{\rho\,v\,c_p\,D}\,L = -\frac{4\,Nu}{Re\,Pr}\,\frac{L}{D}$$

c.

$$\frac{T_\mathrm{w} - < T_L >}{T_\mathrm{w} - T_0} = \exp\left(-\frac{4\,Nu}{Re\,Pr}\,\frac{L}{D}\right) = \exp(-7.72) = 0.66 \times 10^{-3}$$

**Opgave 23.**

a. Om de warmtestroomdichtheid op $x = R$ gelijk aan nul te houden is nog eenzelfde temperatuurprofiel nodig gespiegeld vanaf $x = 2\,R$. Dan wordt:

$$\theta = 2\,\mathrm{erfc}(1.0) = 2\,(1.0 - 0.8427) = 0.3146$$

b.

$$Fo = \frac{a\,t}{D^2} = \frac{a\,t}{4\,R^2} = \frac{1}{16} = 0.0625$$

In de grafiek lezen we dan af: $M = 1 - \theta = 0.7$, ofwel $\theta = 0.3$. (Met vergelijking 3.77 uit het boek vinden we $\theta = 0.3129$.)

**Opgave 24.**

a. Voor $\langle M \rangle = 0.1$ lezen we in de doorwerkingsgrafiek af $Fo_\infty = 0.045$. Daarmee wordt

$$Fo = 0.045 + \frac{0.8}{10 \times 0.2}\,\frac{1}{6}\,\ln 10 = 0.1985 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{D^2}{a_\mathrm{g}}\,Fo = 1.80 \times 10^4\,\mathrm{s}$$

b. Voorbeeld 3.8 uit het boek geeft $t = 1.9 \times 10^4\,\mathrm{s}$. Beide methoden geven hier vergelijkbare uitkomsten. Een verdere vergelijking met een (exacte) analytische oplossing geeft uitsluitsel welke van de twee methoden de beste benaderingen geeft.

## Opgave 25.

a. We noemen de lokale gemiddelde watertemperuur $T_\mathrm{i}$, de temperatuur in het grensvlak water-staal $T_\mathrm{wi}$ en de temperatuur in het grensvlak staal-lucht $T_\mathrm{wu}$. In de stationaire toestand is de warmtestroom per lengte-eenheid constant

$$\frac{\phi_q}{\Delta L} = h_\mathrm{i}\,\pi\,D_\mathrm{i}\,(T_\mathrm{i} - T_\mathrm{wi})$$

$$\frac{\phi_q}{\Delta L} = \frac{2\,\pi\,\lambda_\mathrm{s}}{\ln(D_\mathrm{u}/D_\mathrm{i})}\,(T_\mathrm{wi} - T_\mathrm{wu})$$

$$\frac{\phi_q}{\Delta L} = h_\mathrm{u}\,\pi\,D_\mathrm{u}\,(T_\mathrm{wu} - T_\mathrm{u})$$

Optellen van de temperatuurintervallen geeft dan:

$$T_\mathrm{i} - T_\mathrm{u} = \frac{\phi_q}{\pi\,\Delta L}\left(\frac{1}{h_\mathrm{i}\,D_\mathrm{i}} + \frac{\ln(D_\mathrm{u}/D_\mathrm{i})}{2\,\lambda_\mathrm{s}} + \frac{1}{h_\mathrm{u}\,D_\mathrm{u}}\right)$$

Met $\dfrac{\phi_q}{\Delta L} = U\,\pi\,D_\mathrm{u}\,(T_\mathrm{i} - T_\mathrm{u})$ wordt dan gevonden:

$$\frac{1}{U} = \frac{D_\mathrm{u}}{D_\mathrm{i}}\,\frac{1}{h_\mathrm{i}} + \frac{D_\mathrm{u}}{2\,\lambda_\mathrm{s}}\,\ln\left(\frac{D_\mathrm{u}}{D_\mathrm{i}}\right) + \frac{1}{h_\mathrm{u}}$$

$$Nu = \frac{h_\mathrm{i}\,D_\mathrm{i}}{\lambda_\mathrm{w}} = 0.027\,Re^{0.8}\,Pr^{0.33} \quad \text{mits} \quad Re > 10^4 \quad \text{en} \quad Pr \geq 0.7$$

$$Re = \frac{\rho_\mathrm{w}\,\langle v\rangle\,D_\mathrm{i}}{\mu_\mathrm{w}} = 1.6\,\times\,10^4$$

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu_\mathrm{w}\,c_p}{\lambda_\mathrm{w}} = 6.72 \quad \text{en daarmee} \quad Nu = 116.9$$

$$h_\mathrm{i} = \frac{\lambda_\mathrm{w}\,Nu}{D_\mathrm{i}} = \frac{0.625\,\times\,116.9}{0.10} = 730\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}$$

Dit resulteert in $U = 79.3\,\mathrm{W/m^2\,K}$.

b. Voor de overgedragen warmte geldt:

$$\phi_q = U\,\pi\,D_\mathrm{u}\,L\,\frac{(T_0 - T_\mathrm{u}) - (T_L - T_\mathrm{u})}{\ln\dfrac{T_0 - T_\mathrm{u}}{T_L - T_\mathrm{u}}} = \rho_\mathrm{w}\,c_p\,\langle v\rangle\,\frac{\pi}{4}\,D_\mathrm{i}^2\,(T_0 - T_L)$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{T_L - T_\mathrm{u}}{T_0 - T_\mathrm{u}}\right) = -\frac{4\,U\,D_\mathrm{u}}{D_\mathrm{i}^2\,\langle v\rangle\,\rho_\mathrm{w}\,c_p}\,L$$

$T_L = 91.4\,^\circ\mathrm{C}$.

## Opgave 26.

a.

$$\phi_q = \frac{\pi}{4}\,D^2\,v\,\rho\,c_p\,(T_L - T_0) \quad \text{en} \quad \phi_q = U\,\pi\,D\,L\,\frac{(T_\mathrm{g} - T_0) - (T_\mathrm{g} - T_L)}{\ln\dfrac{T_\mathrm{g} - T_0}{T_\mathrm{g} - T_L}}$$

$$\Rightarrow \quad U_1 = \frac{D\,v\,\rho\,c_p}{4\,L}\,\ln\frac{T_\mathrm{g} - T_0}{T_\mathrm{g} - T_L} = 480.2\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}$$

b. Met nu $T_L = 81.5\,°\mathrm{C}$ vinden we $U_2 = 544.8\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}$. Voor de verhouding van de inwendige warmteoverdrachtscoëfficiënten van het water schrijven we:

$$\frac{h_{\mathrm{i1}}}{h_{\mathrm{i2}}} = \frac{Nu_{\mathrm{i1}}}{Nu_{\mathrm{i2}}} = \left(\frac{Re_1}{Re_2}\right)^{0.8} = 0.5743$$

Met $\frac{1}{U_1} = \frac{1}{h_{\mathrm{i1}}} + \frac{1}{h_{\mathrm{e}}}$ en $\frac{1}{U_2} = \frac{1}{h_{\mathrm{i2}}} + \frac{1}{h_{\mathrm{e}}}$ vinden we:

$$\frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_2} = \frac{0.4247}{h_{\mathrm{i1}}} \quad \Rightarrow \quad h_{\mathrm{i1}} = 1724.\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}$$

Daarmee wordt de externe warmteoverdrachtscoëfficiënt: $h_{\mathrm{e}} = 666.\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}$

**Opgave 27.**

In de datacompanion wordt gevonden:
ijzer: $\lambda_{\mathrm{ij}} = 80.4\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $a_{\mathrm{ij}} = 2.2 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$
asfalt: $\lambda_{\mathrm{a}} = 0.74\,\mathrm{W/(m\,K)}$, $a_{\mathrm{a}} = 6.2 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}$

a. Met $\phi''_{q=} - \lambda\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \lambda\,\frac{T(0,t) - T_0}{\delta}$ en de gegeven formule vinden we direct

$$\delta = \lambda\sqrt{\frac{4\,t}{\pi\,\lambda\,\rho\,c_p}} = \sqrt{\frac{4\,\lambda\,t}{\pi\,\rho\,c_p}} = \sqrt{\frac{4\,a\,t}{\pi}}$$

b.

$$\int_0^L (T(x,t) - T(L,t))\;\mathrm{d}x = \frac{\phi''_q\,L}{2\,\lambda}\int_0^L \left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\phi''_q\,L}{2\,\lambda}\,\frac{L}{3}\left(\frac{x}{L} - 1\right)^3\Bigg|_0^L = \frac{\phi''_q\,L^2}{6\,\lambda}$$

$$(T(0,t) - T(L,t))\;\frac{L}{3} = \frac{\phi''_q\,L^2}{6\,\lambda}\left(\frac{0}{L} - 1\right)^2 = \frac{\phi''_q\,L^2}{6\,\lambda}$$

c. De grens $Fo = 0.1$ wordt het eerst bereikt in het ijzer.

$$Fo_{\mathrm{ij}} = \frac{a_{\mathrm{ij}}\,t}{4\,L^2} = 0.1 \quad \rightarrow \quad t = 0.1\,\frac{4\,L^2}{a_{\mathrm{ij}}} = 0.44\,\mathrm{s}$$

De wandtemperatuur is voor ijzer en asfalt hetzelfde. Uit de vergelijking voor de wandtemperatuur volgt dan direct:

$$\frac{\phi''_{\mathrm{w,ij}}}{\phi''_{\mathrm{w,a}}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\mathrm{ij}}\,\rho_{\mathrm{ij}}\,c_{p,\mathrm{ij}}}{\lambda_{\mathrm{a}}\,\rho_{\mathrm{a}}\,c_{p,\mathrm{a}}}} = 18.24$$

Deze verhouding is voor korte tijden tijdonafhankelijk.

d. De wandtemperatuur wordt gevonden met

$$\phi''_{\mathrm{w,ij}} + \phi''_{\mathrm{w,a}} = (T_{\mathrm{w}} - T_0)\sqrt{\frac{\pi}{4\,t}}\left(\sqrt{\lambda_{\mathrm{ij}}\,\rho_{\mathrm{ij}}\,c_{p,\mathrm{ij}}} + \sqrt{\lambda_{\mathrm{a}}\,\rho_{\mathrm{a}}\,c_{p,\mathrm{a}}}\right)$$

Voor $t = 0.1\,\mathrm{s}$ wordt gevonden $T_{\mathrm{w}} - T_0 = 0.0039\,\mathrm{K}$.

e. Voor elk van de materialen geldt nu een energiebalans van de vorm:

$$\rho \, c_p \, L \, \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi''_q$$

Hieruit volgt bij een gelijke opwarmsnelheid in beide materialen:

$$\gamma = \frac{\phi''_{\mathrm{w,ij}}}{\phi''_{\mathrm{w,a}}} = \frac{\rho_{\mathrm{ij}} \, c_{p,\mathrm{ij}} \, L_1}{\rho_{\mathrm{a}} \, c_{p,\mathrm{a}} \, L_2} = 1.531$$

f. Uitgedrukt met de wandtemperatuur en gebruik makend van de eerder berekende integraal kunnen we na lange tijd voor de inwendige energie in een materiaal schrijven:

$$U'' = \rho \, c_p \, L \left( (T_{\mathrm{w}} - T_0) - \frac{\phi''_q \, L}{3 \, \lambda} \right)$$

De energiebalans geïntegreerd vanaf $t = 0$ geeft dan:

$$\phi''_q t = U''_{\mathrm{ij}} + U''_{\mathrm{a}} \quad \Rightarrow$$

$$(T_{\mathrm{w}} - T_0) \, (\rho_{\mathrm{ij}} \, c_{p,\mathrm{ij}} \, L_1 + \rho_{\mathrm{a}} \, c_{p,\mathrm{a}} \, L_2) = \phi''_q \left( t + \frac{\gamma}{1+\gamma} \, \frac{L_1^2}{3 \, a_{\mathrm{ij}}} + \frac{1}{1+\gamma} \, \frac{L_2^2}{3 \, a_{\mathrm{a}}} \right)$$