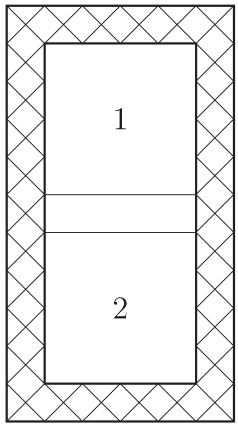
TN4780TU Fysische Transportverschijnselen

Tentamenopgaven hoofdstuk 1

Opgave 1. 14 januari 2008

Binnen een geïsoleerde ruimte bevinden zicht twee massieve metalen kubussen, beide met een ribbe $a = 0.05\,\mathrm{m}$. Kubus 1 is van aluminium met soortelijke warmte $c_1 = 900\,\mathrm{J/kg\,K}$ en dichtheid $\rho_1 = 2700\,\mathrm{kg/m^3}$ en kubus 2 is van koper met soortelijke warmte $c_2 = 386\,\mathrm{J/kg\,K}$ en dichtheid $\rho_2 = 8930\,\mathrm{kg/m^3}$. De metalen gedragen zich als incompressibel medium. De kubussen hebben in goede benadering een uniforme temperatuur en kunnen warmte uitwisselen via een luchtlaag met dikte $d = 0.005\,\mathrm{m}$. De luchtlaag heeft een verwaarloosbare warmtecapaciteit en de warmtestroom tussen de kubussen wordt gemodelleerd met een constante warmtegeleidingscoëfficiënt $\lambda = 0.027\,\mathrm{W/m\,K}$. T_1 en T_2 zijn de tijdafhankelijke temperaturen van kubus 1 respectievelijk 2. Op het begintijdstip $t = 0$ is $T_1 = T_1^0 = 450\,\mathrm{K}$ en $T_2 = T_2^0 = 350\,\mathrm{K}$.



a. Leid een vergelijking af voor de eindtemperatuur T_e en bereken deze.

b. Geef met behulp van de energiebalans toegepast op elk van de kubussen de vergelijkingen voor $\dfrac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}$ en $\dfrac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}$.

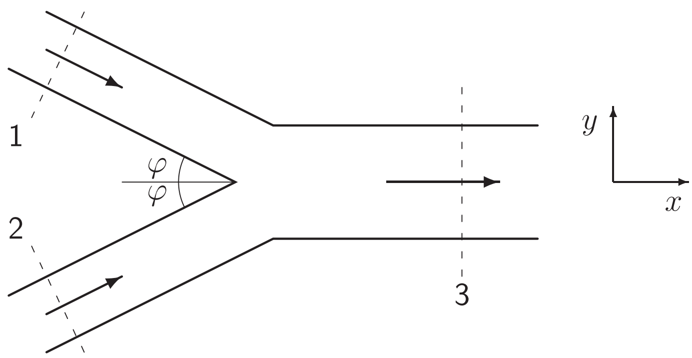
c. Laat eerst door middel van een oplossing zien hoe het temperatuursverschil $T_1 - T_2$ zich als functie van de tijd gedraagt.

d. Leid uit de tot nu verkregen resultaten een vergelijking af zowel voor temperatuur T_1 als temperatuur T_2. In deze vergelijking mag T_e voorkomen.

e. Bereken T_1 en T_2 voor $t = 10800\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{h}$.

Opgave 2. 14 januari 2008

Een tweetal horizontale leidingen 1 en 2 komen bij elkaar in een Y-vormig verbindingsstuk en gaan vervolgens horizontaal verder in leiding 3. Het geheel is symmetrisch om de x-as. De hoek die de binnenkomende leidingen maken met de x-as is $\varphi = \arctan(1/2)$. De aankomende leidingen hebben een dwarsdoorsnede $A_1 = A_2 = A$, na het verbindingsstuk is de doorsnede $A_3 = 4\,A$. Door dit systeem stroomt water. De snelheid bij punt 1 is gelijk aan die in punt 2 en is v. Ook de drukken in de punten 1 en 2 zijn gelijk en bedragen p. De toestand is stationair en dissipatie is verwaarloosbaar



a. Onder welke voorwaarden gaat de mechanische energiebalans over in de vergelijking van Bernoulli?

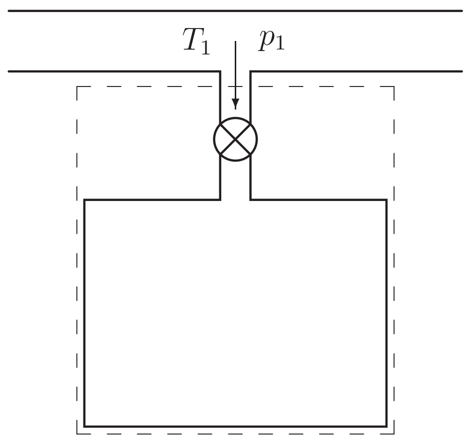
b. Bereken de snelheid v_3 en druk p_3 in doorsnede 3.

c. Bereken de kracht die het Y-vormige verbindingsstuk tussen de punten 1, 2 en 3 op de vloeistof uitoefent.

Opgave 3. 22 augustus 2008

Een goed geïsoleerde vat met een inhoud van $10\,\mathrm{m}^3$ is verbonden met een grote stoomleiding, waardoor stoom getransporteerd wordt met temperatuur $T_1 = 280\,°\mathrm{C}$ en druk $p_1 = 15\,\mathrm{bar}$. Aanvankelijk is het vat vacuum. Via het openen van een kraan kan stoom het vat instromen, totdat de druk in het vat ook $15\,\mathrm{bar}$ bedraagt. Stel de hoeveelheid stoom die aan het eind van het proces het vat is ingestroomd gelijk aan M en de temperatuur van de stoom in het vat aan het eind van het proces T_e.

Eigenschappen oververhitte stoom voor $p = 15\,\mathrm{bar}$			
T	v	u	h
°C	m^3/kg	kJ/kg	kJ/kg
200	0.1325	2598.1	2796.8
240	0.1483	2676.9	2899.3
280	0.1627	2748.6	2992.7
320	0.1765	2817.1	3081.9
360	0.1899	2884.4	3169.2
400	0.2030	2951.3	3255.8
440	0.2160	3018.5	3342.5
500	0.2352	3120.3	3473.1



Het specifiek volume in deze tabel $v = 1/\rho$. Effecten van potentiële en kinetische energie kunnen worden verwaarloosd.

a. Laat met behulp van de energiebalans zien dat de verandering in inwendige energie van de vatinhoud gegeven wordt door

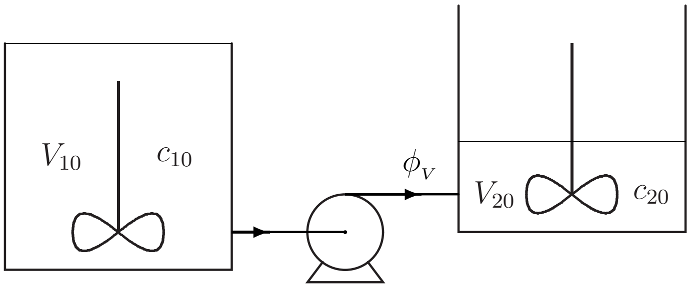
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \phi_m\, h(T_1, p_1)$$

b. Integreer deze vergelijking over het hele proces, bedenkend dat de totaal ingestroomde massa $M = \int \phi_m\, \mathrm{d}t$ en bereken $u(T_\mathrm{e}, p_1)$.

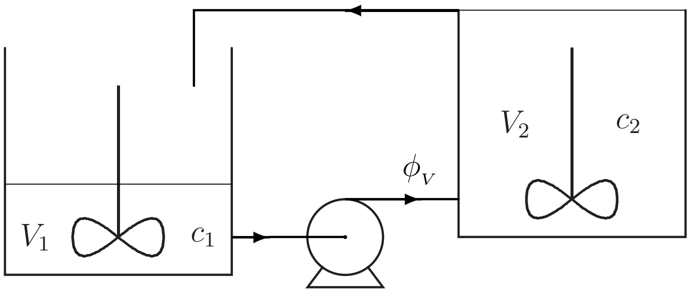
c. Laat zien hoe met de specifieke inwendige energie aan het eind van het proces de temperatuur T_e en het specifiek volume v_e door middel van interpolatie in de gegeven tabel kunnen worden bepaald.

d. Bereken M, de hoeveelheid stoom in het vat aan het eind van het proces.

Opgave 4. 22 augustus 2008



Begintoestand



Toestand bij overloop

Een goed geroerd vat, links in de tekening, met volume V_0 is aanvankelijk geheel gevuld ($V_{10} = V_0$) met een zoutoplossing in water met concentratie c_0. Een ander goed geroerd vat, rechts in de tekening en ook met volume V_0, is aanvankelijk voor $40\,\%$ gevuld met zuiver water ($V_{20} = 0.4\,V_0$). Op een bepaald tijdstip $t = 0$ wordt de pomp aangezet en wordt de zoutoplossing met volumedebiet ϕ_V naar het rechtervat gevoerd. Wanneer het rechtervat vol raakt wordt de overtollige vloeistof via een overloop teruggevoerd naar het linkervat. Het volume van de leidingen mag worden verwaarloosd.

a. Geef vergelijkingen voor V_1 en V_2, de hoeveelheden vloeistof in beide vaten, als functie van de tijd. Op welk tijdstip $t = t_0$ begint het rechtervat over te lopen?

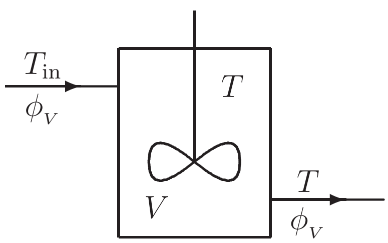
b. Geef een balans voor de totale hoeveelheid zout en bereken daaruit de voor beide vaten gelijke eindconcentratie c_e.

c. Geef voor elk vat afzonderlijk de massabalansen, tevens differentiaalvergelijkingen, voor de zoutconcentraties c_1 en c_2, zowel voor als na tijdstip t_0.

d. Geef een afleiding van het verloop van de zoutconcentraties c_1 en c_2 als functie van de tijd. Geef daarvan een schets. Zijn $c_1(t)$ en $c_2(t)$ differentieerbaar voor $t = t_0$?

Opgave 5. 16 januari 2009

Een ideaal geroerd vat met volume V wordt al sinds lange tijd doorstroomd met een volumedebiet ϕ_V water met temperatuur T_1.
Vanaf het tijdstip $t = 0$ wordt de temperatuur T_{in} van de instroom gedurende een tijd $\tau \gg V/\phi_V$ langzaam verminderd volgens:

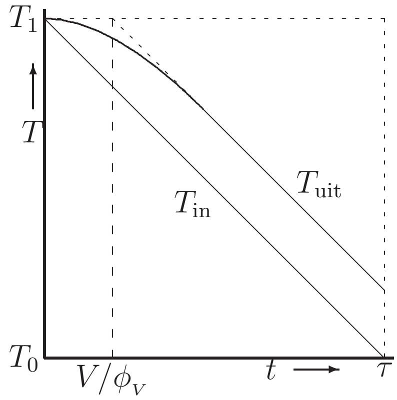


$$T_{\text{in}} = T_1 - (T_1 - T_0)\,\frac{t}{\tau}$$

a. Geef voor het tijdinterval $0 \leq t \leq \tau$ de energiebalans voor het water in het vat.

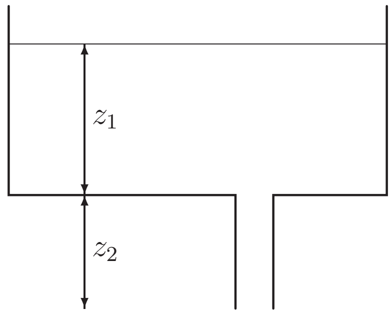
b. Laat zien, dat een lineaire tijdsfunctie $T - T_1 = a + b\,t$ een particuliere oplossing is van de differentiaalvergelijking. Bepaal de constanten a en b.

c. Los, gebruik makend van de beginvoorwaarde, de differentiaalvergelijking op, resulterend in een uitdrukking voor de temperatuur in het vat voor $0 \leq t \leq \tau$.



Opgave 6. 16 januari 2009

Een grote open cilindrische tank met oppervlak A is aanvankelijk tot een hoogte z_1 gevuld met een vloeistof met constante dichtheid ρ. Deze tank loopt leeg door een in de bodem gemonteerde pijp met diameter D en lengte z_2. Er geldt $A \gg D^2$. Er wordt een stroming zonder dissipatie verondersteld. Het vloeistofniveau in de tank verandert zo langzaam, dat in de van toepassing zijnde balans een stationaire situatie mag worden aangenomen.



a. Leid een vergelijking af voor de stroomsnelheid van de vloeistof in de uitstroompijp en de druk in de uitstroompijp op bodemhoogte.

b. Leid een vergelijking af voor de tijd die nodig is om het vat leeg te laten lopen.

c. Beredeneer of bereken of de uitstroomtijd voor een lengte $z_2 > 0$ groter of kleiner is dan de uitstroomtijd bij lengte $z_2 = 0$.

Opgave 7. 21 augustus 2009

Uit een massa-analyse van een bepaalde soort steenkool volgt dat deze steenkool bestaat uit: $77.54\%\,\mathrm{C}$, $4.28\%\,\mathrm{H}$, $1.46\%\,\mathrm{S}$, $7.72\%\,\mathrm{O}$, $1.34\%\,\mathrm{N}$ en 7.66% onverbrandbare producten die in de as worden teruggevonden.

In een incomplete tabel van molaire massa's is gevonden: $M_{\mathrm{CO_2}} = 0.04401\,\mathrm{kg/mol}$, $M_{\mathrm{SO_2}} = 0.06406\,\mathrm{kg/mol}$, $M_{\mathrm{O_2}} = 0.03200\,\mathrm{kg/mol}$, $M_{\mathrm{N_2}} = 0.02801\,\mathrm{kg/mol}$ en $M_{\mathrm{H_2O}} = 0.01802\,\mathrm{kg/mol}$.

Deze steenkool wordt verbrand met een 20% overmaat aan lucht, d.w.z. 20% meer lucht als nodig voor een volledige verbranding. In de verbrandingsgassen komen alleen $\mathrm{CO_2}$, $\mathrm{H_2O}$, $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{N_2}$ en $\mathrm{SO_2}$ voor. Lucht wordt hier gemodelleerd als $(1\,\mathrm{mol}\ \mathrm{O_2} + 3.76\,\mathrm{mol}\ \mathrm{N_2})$.

a. Geef de reactievergelijking voor $1\,\mathrm{kg}$ steenkool.

b. Bepaal het aantal kg toegevoerde lucht per kg steenkool.

c. Bepaal de molfractie aan $\mathrm{SO_2}$ in de verbrandingsgassen.

Opgave 8. 21 augustus 2009

Op tijdstip $t = 0$ is een ideaal geroerde tank met volume V_0 slechts voor de helft gevuld met water. De temperatuur van het water is dan T_0. Vanaf tijdstip $t = 0$ komt er een waterdebiet ϕ_V de tank binnen. Dit water heeft temperatuur T_1. Tevens stroomt er vanaf $t = 0$ een waterdebiet $\frac{1}{2}\phi_V$ de tank uit.

Het vermogen dat de roerder in de tank afgeeft mag worden verwaarloosd en er vindt geen warmte-uitwisseling plaats tussen vat en de omgeving. Het vat wordt verliesvrij doorstroomd. De vragen hebben betrekking op het tijdsinterval tussen $t = 0$ en het moment dat de tank overloopt.

a. Stel een massabalans op voor het water in de tank en bepaal het verloop van het watervolume in de tank.

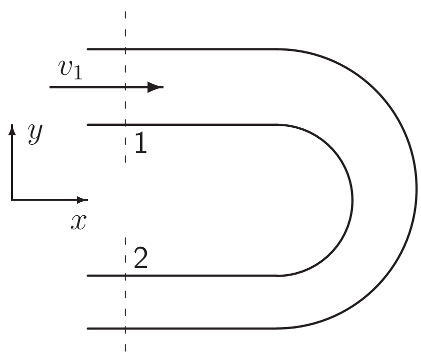
b. Stel een energiebalans op voor het water in de tank.

c. Bepaal het verloop van de temperatuur in de tank.

d. Bereken de temperatuur van de inhoud van de tank op het moment dat de tank overloopt.

Opgave 9. 21 augustus 2009

Water stroomt stationair door een bocht die zich in een horizontaal vlak bevindt. In de figuur ziet u hiervan een bovenaanzicht. De bocht is een zogenaamde U-bocht van $180°$. De ingang (1) van de bocht heeft een doorsnede (oppervlak) gelijk aan $2A$ en aan de uitgang (2) is de doorsnede gelijk aan A. De verandering van doorsnede vindt geleidelijk plaats en de straal van de bocht is groot, zodat energiedissipatie in de bocht kan worden verwaarloosd. We nemen aan dat het water een uniform snelheidsprofiel heeft.

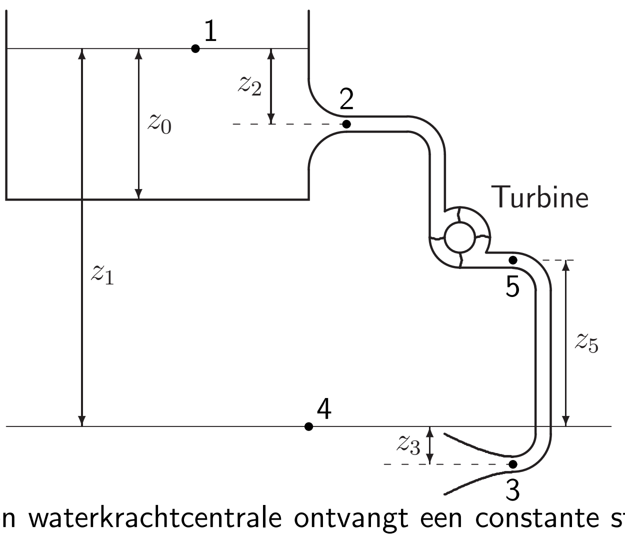


a. Leid een relatie af tussen de snelheden v_1 en v_2.

b. Leid een relatie af voor de druk p_2 uitgedrukt in variabelen op positie 1.

c. Leid een relatie af voor de nettokracht die de vloeistof in de x-richting op de bocht uitoefent. Bereken deze kracht voor het geval $p_1 = 2\,\text{bar}$, $v_1 = 4\,\text{m/s}$ en $A = 1\,\text{cm}^2$.

Opgave 10. 25 januari 2010



$$z_0 = 30\,\text{m}$$
$$z_1 = 300\,\text{m}$$
$$z_2 = 15\text{m}$$
$$z_3 = 3\,\text{m}$$
$$p_{a1} = 0.97\,\text{bar}$$
$$p_{a4} = 1\,\text{bar}$$

Een waterkrachtcentrale ontvangt een constante stroom water van $4\,°\text{C}$ uit een hooggelegen stuwmeer en loost dat uiteindelijk in een doodlopende zijtak van een rivier. In de figuur zijn de hoogten z_1 en z_3 gerekend vanaf het wateroppervlak in de zijtak en de hoogten z_0 en z_2 vanaf het wateroppervlak in het stuwmeer. Deze hoogten mogen constant verondersteld worden. Effecten van wrijving in de turbine en in de toe- en afvoerleidingen mogen worden verwaarloosd. De diameter van deze leidingen is $D = 1.0\,\mathrm{m}$. De atmosferische druk hangt nog van de hoogte af, zoals naast de figuur gegeven. Water kan worden gezien als een incompressibele vloeistof.

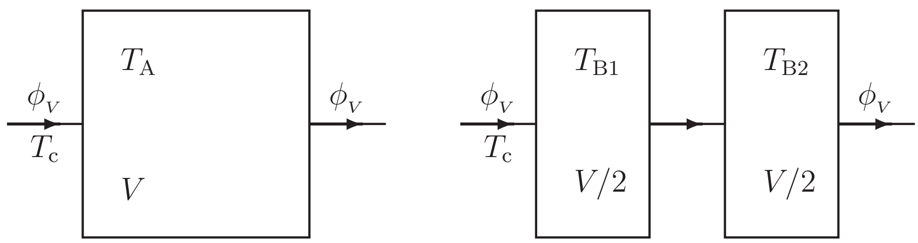
a. Geef tussen de punten 1 en 2, 2 en 3 en ook 3 en 4 aan welke termen er overblijven van de totale energiebalans.

b. Geef het maximaal op te wekken vermogen voor een massadebiet van $1000\,\mathrm{kg/s}$.

c. Geef een vergelijking voor de druk in punt 5. Welke conclusie is, bij een massadebiet van $1000\,\mathrm{kg/s}$, daaruit te trekken omtrent de hoogte z_5 van de turbine in de leiding tussen stuwmeer en zijtak?

Opgave 11. 25 januari 2010

Er wordt gevraagd twee situaties voor warmteopslag van zonnewarmte te beoordelen. Situatie A, links in de figuur, bestaat uit één goed geroerd opslagvat van zeker volume V en situatie B, rechts in de figuur, uit twee goed geroerde vaten in serie, elk met een volume gelijk aan $V/2$. Oorspronkelijk zijn alle vaten gevuld met water op omgevingstemperatuur T_0. Vanaf tijdstip $t = 0$ wordt water met volumedebiet ϕ_V en constante temperatuur T_c aan de twee opslagsystemen toegevoerd. De dichtheid ρ en soortelijke warmte c_p van het water zijn constant. Warmteverliezen naar de omgeving en de roerdervermogens mogen worden verwaarloosd. De stroming door de vaten wordt verondersteld verliesvrij te zijn.



a. Leid een formule af voor de temperatuur als functie van de tijd voor het enkele vat in situatie A en voor het linkervat in situatie B.

b. Laat zien, dat
$$\frac{T_\mathrm{B2} - T_0}{T_\mathrm{c} - T_0} = 1 - \left(1 + \frac{2\,\phi_V\,t}{V}\right) \cdot \exp\left(-\frac{2\,\phi_V\,t}{V}\right)$$
een oplossing is van de differentiaalvergelijking en beginvoorwaarde voor de temperatuur in het rechter vat in situatie B.

c. Welke fractie van de toegevoerde warmte $\phi_V\,\rho\,c_p\,(T_\mathrm{c} - T_0)\,t$ is op het tijdstip $t = V/\phi_V$ opgeslagen in elk van de drie vaten?

d. Beredeneer welke van de twee systemen volgens deze berekening het beste als warmte-opslag fungeert.

Opgave 12. 23 augustus 2010

Een ideale buisreactor heeft de vorm van een lange, rechte cilinder met lengte L en straal R. Door de reactor stroomt een vloeistof met (uniforme) snelheid v. Bij het binnenstromen van de reactor bevat de vloeistof een stof A met een concentratie $c_0\,\mathrm{kg/m^3}$. In de reactor wordt stof A omgezet volgens een derde orde reactie $r_\mathrm{A} = -k_\mathrm{r}\,c_\mathrm{A}^3$. Er mag aangenomen worden dat er geen volumeverandering optreedt als gevolg van de reactie. Het probleem mag als ééndimensionaal opgevat worden.

a. Wat is de dimensie van de reactiesnelheidsconstante k_r?

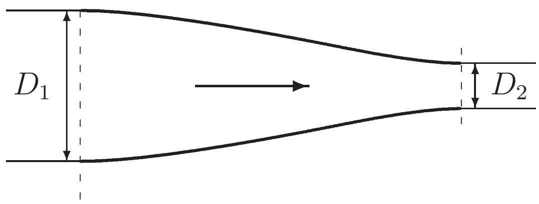
b. Toon aan, dat het verloop van de concentratie c_A van stof A als functie van de plaats x in de reactor wordt gegeven door

$$c_\mathrm{A} = c_0 \left(\frac{2\,k_\mathrm{r}\,x\,c_0^2}{v} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

c. Hoe lang moet de reactor zijn om stof A voor 99 % om te zetten?

Opgave 13. 23 augustus 2010

Uit het spuitstuk van een horizontale brandslang (cilindervormig, diameter $D_1 = 10\,\mathrm{cm}$) spuit een waterstraal door een rond gat (met een diameter $D_2 = 4\,\mathrm{cm}$) dat zich aan het einde van het spuitstuk bevindt. De snelheid van het water juist in de spuitopening is $v_2 = 15\,\mathrm{m/s}$. De waterstraal spuit stationair en vrij de buitenlucht in.



Bij de gevraagde berekeningen mag energiedissipatie verwaarloosd worden. Tevens mag de contractie van de waterstraal net na de uitstroomopening buiten beschouwing gelaten worden.

a. Stel een massabalans op voor het volume tussen de doorsneden 1 en 2. Bepaal hieruit de watersnelheid v_1 ter hoogte van doorsnede 1.

b. Stel een energiebalans op voor het volume tussen de doorsneden 1 en 2. Bepaal hieruit de drukval $p_1 - p_2$.

c. Stel een impulsbalans op in de hoofdstroomrichting voor het volume tussen de doorsneden 1 en 2. Bepaal hieruit de kracht F, in grootte en richting, die het spuitstuk op het water uitoefent.

Opgave 14. 24 januari 2011

Een goed geroerd vat met volume V wordt al lange tijd doorstroomd door een waterige oplossing met een debiet ϕ_V en concentratie c_0. Op $t = 0$ wordt overgeschakeld op eenzelfde debiet schoon water en wordt tevens aan het vat een katalysator toegevoegd waardoor de opgeloste stof met een tweede-orde reactie wegreageert: $r \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3\,s}}\right] = -k_\mathrm{r}\,c^2$.

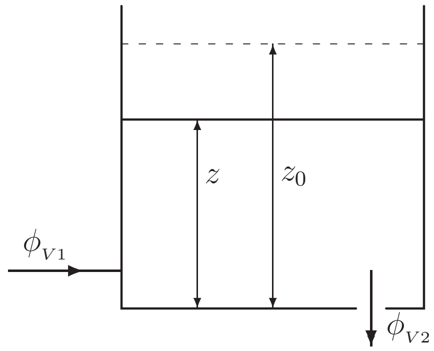
a. Geef de differentiaalvergelijking voor de concentratie in het vat.

b. Los de differentiaalvergelijking met beginvoorwaarde op. Bedenk hierbij, dat sommige integralen kunnen worden vereenvoudigd door breuksplitsen.

c. Wanneer $\tau = V/\phi_V$ en $\dfrac{k_r\, V\, c_0}{\phi_V} = 1$, hoeveel tijd, uitgedrukt in τ, is er dan nodig tot de concentratie in het vat is gedaald tot een fractie $1/e$ van de oorspronkelijke concentratie?

Opgave 15. 24 januari 2011

Een vat met constante doorsnede A is aanvankelijk leeg. In de de bodem bevindt zich een uitstroomopening waarvan het debiet gegeven wordt door $\phi_{V2} = C\sqrt{z}$. Hierin is z de momentane vloeistofhoogte in het vat en C een constante. Het vat heeft een constante instroom $\phi_{V1} = \phi_V$ en na lange tijd wordt er een constante vloeistofhoogte in het vat bereikt gelijk aan z_0.



a. Druk de constante C uit in de overige gegeven grootheden.

b. Stel een differentiaalvergelijking op voor hoe de vloeistofhoogte in de tijd verandert.

c. Leid het verband af tussen vloeistofhoogte en tijd.

Aanwijzing: $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{x}} = -2\sqrt{x} - 2\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$

Opgave 16. 30 januari 2012

Een goed geroerd vat met constant vloeistofvolume V wordt doorstroomd met een constant volumedebiet ϕ_V. De temperatuur van de ingaande stroom varieert en is gegeven door $T_{\text{in}} = T_1 + \Delta T\, \sin(\omega\, t)$. Het vat wordt verliesvrij doorstroomd en de warmte-uitwisseling met de omgeving mag worden verwaarloosd.

a. Geef, uitgaande van de energiebalans, de differentiaalvergelijking voor de vattemperatuur.

Wanneer deze situatie al lang duurt wordt de temperatuur van de uitgaande stroom gevonden met een particuliere oplossing van de vorm: $T_{\text{uit}} = b_1 + b_2\, \cos(\omega\, t) + b_3\, \sin(\omega\, t)$.

b. Bepaal de constanten b_1, b_2 en b_3.

c. Hoe groot moet $\dfrac{\omega\, V}{\phi_V}$ zijn, opdat de amplitude van de temperatuursfluctuaties aan de uitgang van het vat een factor 3 kleiner zijn dan aan de ingang.

Opgave 17. 20 april 2012

Een goed geroerde tank met een totaal volume V_0 is aanvankelijk voor eenderde gevuld met een vloeistof op omgevingstemperatuur T_0, met dichtheid ρ en soortelijke warmte c_p. Vanaf een zeker moment ($t = 0$) wordt een vloeistofstroom ϕ_V van dezelfde vloeistof, maar met temperatuur T_1, aan het vat toegevoerd. Er mag worden aangenomen dat het roerdervermogen verwaarloosbaar is en dat de doorstroming verliesvrij is. Boven in het vat bevindt zich een overloop, waarmee de overtollige vloeistof wordt afgevoerd. De warmtestroom van het vat naar de omgeving wordt gegeven door $\phi_q = K_0\,(T - T_0)$, waarin T de vloeistoftemperatuur in het vat en K_0 een constante is.

a. 1 punt Geef aan hoe het vloeistofvolume in het vat met de tijd verloopt en bepaal het tijdtip τ wanneer er vloeistof door de overloop gaat stromen.

b. 2 punten Leid, voor $t \leq \tau$, een in variabelen gescheiden differentiaalvergelijking af voor de vattemperatuur.

c. 3 punten Los de differentiaalvergelijking algemeen op en bepaal de vattemperatuur voor het geval dat $t = \tau$ en $A = \dfrac{K_0}{\rho\, c_p\, \phi_V} = 1$.

Uitwerkingen hoofdstuk 1

Opgave 1.

a. Voor het totale systeem is de inwendige energie constant, ofwel:

$$\rho_1\, c_1\, V_1\, T_1^0 + \rho_2\, c_2\, V_2\, T_2^0 = \rho_1\, c_1\, V_1\, T_1 + \rho_2\, c_2\, V_2\, T_2 = (\rho_1\, c_1\, V_1 + \rho_2\, c_2\, V_2)\, T_\mathrm{e}$$

$$T_\mathrm{e} = \frac{\rho_1\, c_1\, T_1^0 + \rho_2\, c_2\, T_2^0}{\rho_1\, c_1 + \rho_2\, c_2} = 391.35\,\mathrm{K}$$

b. Afzonderlijke energiebalansen over beide kubussen geeft:

$$\rho_1\, c_1\, V_1\, \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda}{d}\, A\, (T_1 - T_2)$$

$$\rho_2\, c_2\, V_2\, \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = +\frac{\lambda}{d}\, A\, (T_1 - T_2)$$

c. Combinatie van de differentiaalvergelijkingen geeft:

$$\frac{\mathrm{d}(T_1 - T_2)}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\lambda\, A}{d\, \rho_1\, c_1\, V_1} + \frac{\lambda\, A}{d\, \rho_2\, c_2\, V_2}\right)(T_1 - T_2) = -k\,(T_1 - T_2)$$

Hierin is

$$k = \left(\frac{1}{\rho_1\, c_1} + \frac{1}{\rho_2\, c_2}\right)\frac{\lambda}{a\, d} = 7.578\ \times\ 10^{-5}\frac{1}{\mathrm{s}}$$

De oplossing wordt dan:

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1^0 - T_2^0} = \exp(-k\, t)$$

Voor de afzonderlijke temperaturen wordt dit:

$$\frac{T_1 - T_\mathrm{e}}{T_1^0 - T_\mathrm{e}} = \exp(-k\, t) \quad \text{respectievelijk} \quad \frac{T_2 - T_\mathrm{e}}{T_2^0 - T_\mathrm{e}} = \exp(-k\, t)$$

Voor $t = 10800\,\mathrm{s}$ wordt dan $k\, t = 0.8184$ en vervolgens $\exp(-k\, t) = 0.4411$.

$$T_1 = 417.2\,\mathrm{K} \quad \text{en} \quad T_2 = 373.1\,\mathrm{K}$$

Opgave 2.

a. Wanneer de dichtheid constant is, de dissipatie verwaarloosbaar is en er geen arbeidsterm is, gaat de mechanische energiebalans over in de vergelijking van Bernoulli. Voor het onderhavige probleem:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\, v_1^2 = \frac{p_3}{\rho} + \frac{1}{2}\, v_3^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}\, v_2^2$$

b. Uit de massabalans

$$v_1\, A_1 + v_2\, A_2 = v_3\, A_3$$

volgt direct:

$$v_3 = v/2$$

Met de vergelijking van Bernoulli vinden we dan voor de druk aan de uitgang:

$$p_3 = p + \frac{1}{2}\, \rho\, \left(v^2 - \frac{v^2}{4}\right) = p + \frac{3}{8}\, \rho\, v^2$$

c. Vanwege symmetrie is er geen netto kracht in de y-richting. De kracht in de x-richting volgt uit een impulsbalans in de x-richting:

$$0 = \phi_{m1}\, v_1\, \cos\varphi + \phi_{m2}\, v_2\, \cos\varphi - \phi_{m3}\, v_3 +$$

$$p_1\, A_1\, \cos\varphi + p_2\, A_2\, \cos\varphi - p_3\, A_3 + F_{x,\mathrm{w}\to\mathrm{f}}$$

$$F_{x,\mathrm{w}\to\mathrm{f}} = -2\,\rho\, v\, A\left(v\, \cos\varphi - \frac{v}{2}\right) - 2\, p\, A\, \cos\varphi + 4\, A\, \left(p + \frac{3}{8}\,\rho\, v^2\right) =$$

$$4\, p\, A\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \rho\, v^2\, A\left(2\frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

Opgave 3.

a. In de energiebalans hebben we te maken met alleen een ingaande stroom en is er geen sprake van warmte-uitwisseling. Voor wat betreft arbeid hebben we alleen te maken met de arbeid om de stoom het vat in te laten stromen. Deze verplaatsingsarbeid is per kg gelijk aan $p/\rho = p\, v$. Omdat per definitie $u + p\, v = h$ houden we van vergelijking 1.84 alleen het linkerlid en de term met de instroom (inclusief verplaatsingsarbeid) over.

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \phi_m\, \left(u(T_1, p_1) + \frac{p_1}{\rho_1}\right) = \phi_m\, h(T_1, p_1)$$

b. Aan het begin van het proces is het vat leeg en de inwendige energie gelijk aan nul. Aan het eind van het proces met druk p_1 en nog onbekende temperatuur T_e is de inwendige energie $U = M\, u(T_\mathrm{e}, p_1)$ De energiebalans vermenigvuldigen met $\mathrm{d}t$ en integreren over het proces geeft vervolgens:

$$M\, u(T_\mathrm{e}, p_1) = M\, h(T_1, p_1)$$

Met $h(T_1, p_1) = 2992.7\,\mathrm{kJ/kg}$ wordt dan ook $u(T_\mathrm{e}, p_1) = 2992.7\,\mathrm{kJ/kg}$. Uit de tabel volgt dan al direct dat $400\,^\circ\mathrm{C} < T_\mathrm{e} < 440\,^\circ\mathrm{C}$.

c. Met interpolatie in de gegeven tabel kunnen dan de temperatuur T_e en het specifieke volume v_e worden gevonden:

$$\frac{T_\mathrm{e} - 400}{440 - 400} = \frac{v_\mathrm{e} - 0.2030}{0.2160 - 0.2030} = \frac{2992.7 - 2951.3}{3018.5 - 2951.3}$$

Dit resulteert in: $T_\mathrm{e} = 424.6\,^\circ\mathrm{C}$, $v_\mathrm{e} = 0.2110\,\mathrm{m^3/kg}$.

d. De massa volgt dan tenslotte uit:

$$M = \rho_\mathrm{e}\, V = \frac{V}{v_\mathrm{e}} = 47.4\,\mathrm{kg}$$

Opgave 4.

a.

$$V_1 = V_0 - \phi_V\, t \quad \text{en} \quad V_2 = 0.4\, V_0 + \phi_V\, t$$

Dit geldt totdat $V_2 = V_0$, ofwel

$$t_0 = \frac{0.6\, V_0}{\phi_V}$$

Daarna is $V_1 = 0.4\, V_0$ en $V_2 = V_0$

b.
$$V_0\, c_0 = V_1\, c_1 + V_2\, c_2 = (0.4\, V_0 + V_0)\ c_e$$

Dit resulteert in: $c_e = \dfrac{5}{7}\, c_0 = 0.714\, c_0$

c. Tot tijd t_0 is de concentratie in het linkervat $c_1 = c_0$ en luiden de massabalansen:

$$\frac{\mathrm{d}(V_2\, c_2)}{\mathrm{d}t} = \phi_V\, c_0 \quad \text{en} \quad \frac{\mathrm{d}(V_1\, c_0)}{\mathrm{d}t} = -\phi_V\, c_0$$

Voor $t > t_0$ luiden de balansen:

$$V_0\, \frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t} = \phi_V\ (c_1 - c_2) \quad \text{en} \quad 0.4\, V_0\, \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t} = \phi_V\ (c_2 - c_1)$$

Met de totaalbalans: $V_0\, c_0 = 0.4\, V_0\, c_1 + V_0\, c_2$ krijgen we als differentiaalvergelijkingen:

$$V_0\, \frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t} = \phi_V\ (2.5\, c_0 - 3.5\, c_2) \quad \text{en} \quad V_0\, \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t} = \phi_V\ (2.5\, c_0 - 3.5\, c_1)$$

d. Voor $t < t_0$ blijft de concentratie in het linkervat $c_1 = c_0$. Tot $t = t_0$ geldt voor het rechtervat:

$$\frac{\mathrm{d}\left((0.4\, V_0 + \phi_V\, t)\ c_2\right)}{\mathrm{d}t} = \phi_V\, c_0$$

$$\phi_V\, c_2\, \mathrm{d}t + (0.4\, V_0 + \phi_V\, t)\ \mathrm{d}c_2 = \phi_V\, c_0\, \mathrm{d}t$$

Met het scheiden der variabelen:

$$\frac{\mathrm{d}c_2}{(c_2 - c_0)} = -\frac{\mathrm{d}t}{(t + 0.4\, V_0/\phi_V)}$$

vinden we

$$\ln(c_2 - c_0) = -\ln(t + 0.4\, V_0/\phi_V) + \ln\, K$$

Met de beginconditie dat voor $t = 0$ de concentratie $c_2 = 0$ geeft dat uiteindelijk:

$$\frac{c_2}{c_0} = \frac{1}{1 + \dfrac{0.4\, V_0}{\phi_V\, t}} = 1 - \frac{1}{1 + \dfrac{2.5\, \phi_V\, t}{V_0}}$$

Dit resultaat is ook direct af te leiden uit de totaalbalans:

$$V_0\, c_0 = V_1\, c_0 + V_2\, c_2$$

Invullen van de bij onderdeel a. verkregen resultaten voor V_1 en V_2 geeft dan de vergelijking voor c_2.

Voor $t > t_0$ hoeven we ook maar één differentiaalvergelijking op te lossen en vinden de andere concentratie dan weer met de totaalbalans. Hier kiezen we ervoor de differentiaalvergelijking voor c_1 op te lossen.

$$V_0\, \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t} = \phi_V\ (2.5\, c_0 - 3.5\, c_1)$$

$$\frac{\mathrm{d}c_1}{2.5\, c_0 - 3.5\, c_1} = \frac{\phi_V}{V_0}\, \mathrm{d}t$$

$$\ln\left(2.5\, c_0 - 3.5\, c_1\right) = -\frac{3.5\, \phi_V\, t}{V_0} + K$$

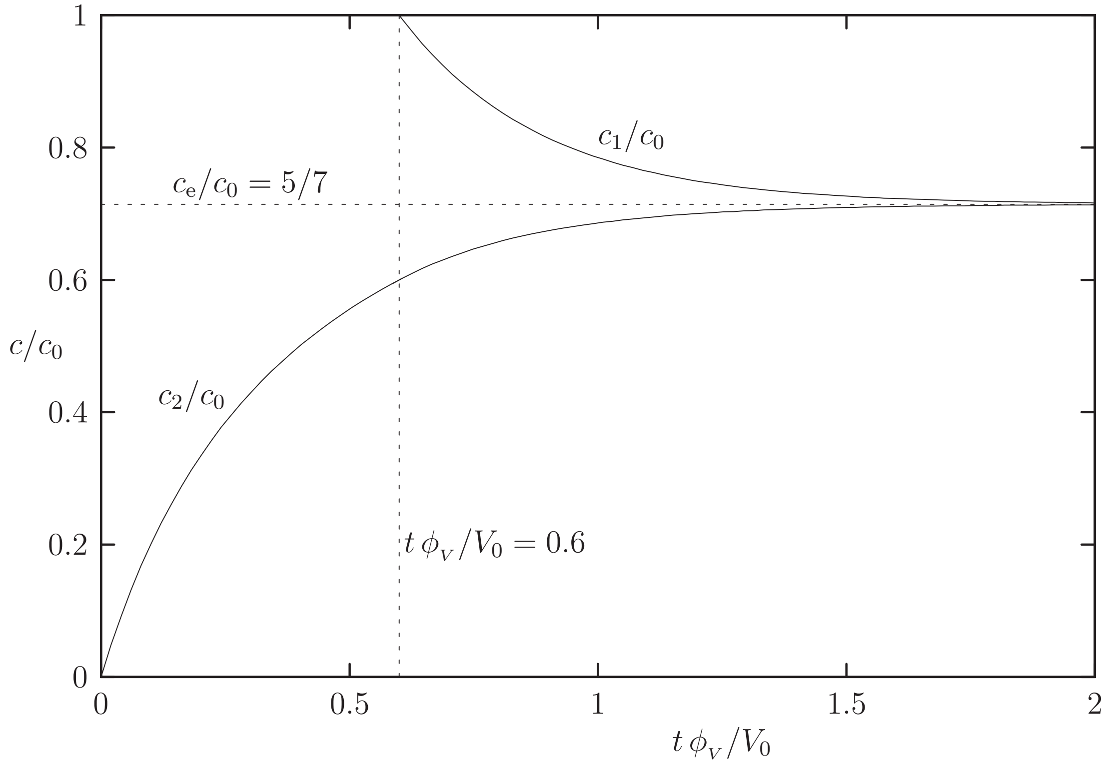
Met de beginvoorwaarde $c_1 = c_0$ voor $t = t_0$, wordt de oplossing:

$$\frac{3.5\,c_1 - 2.5\,c_0}{c_0} = \exp\left(-\frac{3.5\,\phi_V\,(t-t_0)}{V_0}\right)$$

en voor de concentratie c_2:

$$\frac{2.5\,c_0 - 3.5\,c_2}{0.4\,c_0} = \exp\left(-\frac{3.5\,\phi_V\,(t-t_0)}{V_0}\right)$$

$c_1(t)$ is niet differentieerbaar voor $t = t_0$. Voor c_2 vinden we links en rechts van $t = t_0$ $\dfrac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2.5\,\phi_V\,c_0}{V_0}$ en $c_2(t)$ is daarmee een differentieerbare functie voor $t = t_0$.



Opgave 5.

a.

$$\rho\,c_p\,V\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \phi_V\,\rho\,c_p\left(T_1 - (T_0 - T_1)\,\frac{t}{\tau} - T\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\phi_V}{V}\left(T_1 - (T_0 - T_1)\,\frac{t}{\tau} - T\right)$$

b. De particuliere oplossing is een lineaire functie volgens:

$$T - T_1 = (T_1 - T_0)\left(\frac{V}{\tau\,\phi_V} - \frac{t}{\tau}\right)$$

c. Voor de homogene vergelijking $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\phi_V}{V}\,T = 0$ is de welbekende oplossing:

$$T = K\,\exp\left(-\frac{\phi_V}{V}\,t\right)$$

Dan luidt de algemene oplossing:

$$T = T_1 + (T_1 - T_0)\left(\frac{V}{\tau\,\phi_V} - \frac{t}{\tau}\right) + K\,\exp\left(-\frac{\phi_V}{V}\,t\right)$$

De integratieconstante K volgt dan nog uit de beginvoorwaarde:

$$K = (T_1 - T_0)\,\frac{V}{\tau\,\phi_V}$$

Opgave 6.

a. Toepassing van Bernoulli tussen het wateroppervlak in de tank (1), een punt op bodemhoogte in de uitstroompijp (2) en de uitstroomopening (3) geeft met hoogte gerekend vanaf de bodem:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g\,z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{p_3}{\rho} + \frac{v_3^2}{2} - g\,z_2$$

Er geldt: $p_1 = p_0$, $p_3 = p_0$, $v_1 = 0$ en $v_2 = v_3 = v$ We vinden dan:

$$\frac{p_0}{\rho} + g\,z = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} - g\,z_2$$

Resulterend in:

$$v = \sqrt{2\,g\,(z + z_2)} \quad \text{en} \quad p_2 = p_0 - \rho\,g\,z_2$$

b. Uit een massabalans vinden we:

$$A\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\phi_V = -\frac{\pi}{4}\,D^2\,\sqrt{2\,g\,(z+z_2)}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z+z_2}} = -\frac{\pi\,D^2}{4\,A}\,\sqrt{2\,g}\,\mathrm{d}t$$

$$2\,\sqrt{z+z_2} = -\frac{\pi\,D^2}{4\,A}\,\sqrt{2\,g}\,t + C_0$$

De beginvoorwaarde geeft: $2\,\sqrt{z_1+z_2} = C_0$. De benodigde tijd t^* voor het leeglopen vinden we dan uit:

$$\frac{\pi\,D^2}{4\,A}\,\sqrt{2\,g}\,t^* = 2\,\sqrt{z_1+z_2} - 2\,\sqrt{z_2}$$

c. t^* blijkt het langst voor $z_2 = 0$, immers:

$$\sqrt{z_1} \geq \sqrt{z_1+z_2} - \sqrt{z_2} \quad \text{want}$$

$$\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} \geq \sqrt{z_1+z_2} \quad \text{want}$$

$$z_1 + z_2 + 2\,\sqrt{z_1\,z_2} \geq z_1 + z_2$$

Beredenerend kan met het resultaat voor v uit onderdeel a. direct gezegd worden dat met toenemende z_2 de uitstroomsnelheid toeneemt en daarmee de tijd nodig voor het leeglopen afneemt.

Opgave 7.

a. Voor de molaire samenstelling van $1\,\mathrm{kg}$ steenkool vinden we:

$$\begin{aligned} 0.7754\,\mathrm{kg\,C} &\cong 64.563\,\mathrm{mol\,C} \\ 0.0428\,\mathrm{kg\,H} &\cong 42.376\,\mathrm{mol\,H} \\ 0.0146\,\mathrm{kg\,S} &\cong 0.455\,\mathrm{mol\,S} \\ 0.0772\,\mathrm{kg\,O} &\cong 4.825\,\mathrm{mol\,O} \\ 0.0134\,\mathrm{kg\,N} &\cong 0.957\,\mathrm{mol\,N} \end{aligned}$$

De reactievergelijking wordt daarmee:

$$64.563\,\mathrm{C} + 42.376\,\mathrm{H} + 0.455\,\mathrm{S} + 4.825\,\mathrm{O} + 0.957\,\mathrm{N} + 1.2\,\times\,73.2(\mathrm{O_2} + 3.76\,\mathrm{N_2}) \rightarrow$$

$$64.563\,\mathrm{CO_2} + 21.188\,\mathrm{H_2O} + 0.455\,\mathrm{SO_2} + 14.64\,\mathrm{O_2} + 330.756\,\mathrm{N_2}$$

b. Per kg steenkool wordt het aantal kg toegevoerde lucht:

$$1.2\,\times\,73.2(M_{\mathrm{O_2}} + 3.76\,M_{\mathrm{N_2}}) = 12.06\,\mathrm{kg}$$

c. De molfractie aan $\mathrm{SO_2}$ in de rookgassen wordt:

$$\frac{0.455}{64.563 + 21.188 + 0.455 + 14.64 + 330.756} = 0.00105$$

Opgave 8.

a.

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \phi_V\,\rho - \frac{\phi_V}{2}\,\rho \quad\Rightarrow\quad \rho\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \rho\,\frac{\phi_V}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\phi_V}{2}$$

V is hier het in de tijd veranderlijke volume. Op $t = 0$ geldt $V = V_0/2$. De oplossing van de differentiaalvergelijking wordt nu:

$$V = \frac{V_0}{2} + \frac{\phi_V}{2}\,t$$

De tank loopt dus over vanaf $t = V_0/\phi_V$.

b. In de energiebalans verwaarlozen we het vermogen van de roerder en nemen we een verliesvrije stroming aan:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\rho\,c\,V\,T)}{\mathrm{d}t} = \rho\,\phi_V\,c\,T_1 - \rho\,\frac{\phi_V}{2}\,c\,T \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}(V\,T)}{\mathrm{d}t} = \phi_V\,T_1 - \frac{\phi_V}{2}\,T \quad\Rightarrow$$

c.

$$V\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + T\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{V_0}{2} + \frac{\phi_V}{2}\,t\right)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\phi_V}{2}\,T = \phi_V\,T_1 - \frac{\phi_V}{2}\,T$$

$$\frac{\mathrm{d}(T - T_1)}{T - T_1} = -\frac{2\,\mathrm{d}(t + V_0/\phi_V)}{t + V_0/\phi_V}$$

Onbepaald integreren geeft:

$$\ln(T - T_1) = -2\,\ln(t + V_0/\phi_V) + C_0$$

Met als beginvoorwaarde:

$$\ln (T_0 - T_1) = -2 \ln (V_0/\phi_V) + C_0$$

vinden we voor het temperatuursverloop

$$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \left(\frac{V_0/\phi_V}{t + V_0/\phi_V} \right)^2$$

d. Voor $t = V_0/\phi_V$ wordt dan:

$$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{3}{4} T_1 + \frac{1}{4} T_0$$

Opgave 9.

a. De massabalans geeft:

$$0 = \rho A_1 v_1 - \rho A_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = 2 v_1$$

b. Wanneer er geen arbeid is, dissipatie kan worden verwaarloosd en de dichtheid constant is gaat de stationaire mechanische energiebalans over in de vergelijking van Bernoulli.

$$0 = \phi_m \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 \right) - \phi_m \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 \right) \quad \Rightarrow$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho \left(v_1^2 - v_2^2 \right) = p_1 - \frac{3}{2} \rho v_1^2$$

c. Met de impulsbalans in de x-richting:

$$0 = \phi_m v_1 - \phi_m (-v_2) + p_1 A_1 + p_2 A_2 + F_{x,\mathrm{w}\to\mathrm{f}} \quad \Rightarrow$$

$$F_{x,\mathrm{f}\to\mathrm{w}} = -F_{x,\mathrm{w}\to\mathrm{f}} = \phi_m (v_1 + v_2) + p_1 A_1 + p_2 A_2 = 3 \rho A_1 v_1^2 + p_1 (A_1 + A_2) - \frac{3}{2} \rho A_2 v_1^2$$

Met de gegeven parameters wordt dit: $F_{x,\mathrm{f}\to\mathrm{w}} = 67.2\,\mathrm{N}$.

Opgave 10.

a. Met $p_1 = p_{\mathrm{a}1}$, $v_1 = 0$ en $\Delta z_{12} = z_2$ wordt de energiebalans tussen de punten 1 en 2:

$$0 = \phi_m \left(\frac{p_{\mathrm{a}1} - p_2}{\rho} + \frac{0 - v_2^2}{2} + g z_2 \right)$$

Met $v_2 = v_3$ en $\Delta z_{23} = z_1 + z_3 - z_2$ wordt de energiebalans tussen de punten 2 en 3:

$$0 = \phi_m \left(\frac{p_2 - p_3}{\rho} + g (z_1 + z_3 - z_2) \right) - \phi_w$$

Met $p_4 = p_{\mathrm{a}4}$, $v_4 = 0$ en $\Delta z_{43} = |z_3|$ wordt de energiebalans tussen de punten 3 en 4:

$$0 = \phi_m \left(\frac{p_3 - p_{\mathrm{a}4}}{\rho} + \frac{v_3^2 - 0}{2} - g |z_3| \right)$$

b. Tussen de punten 1 en 4 wordt dan de balans

$$0 = \phi_m \left(\frac{p_{\mathrm{a1}} - p_{\mathrm{a4}}}{\rho} + g\, z_1 \right) - \phi_w$$

$$\phi_w = 1000 \left(\frac{-0.03\ \times\ 10^5}{1000} + 9.8\ \times\ 300 \right) = 2.937\,\mathrm{MW}$$

Het effect van de verschillende atmosferische drukken is van de orde $\rho_{\mathrm{air}}/\rho_{\mathrm{water}}$ en verwaarloosbaar.

c. Tussen de punten 5 en 4 wordt de balans

$$0 = \phi_m \left(\frac{p_5 - p_{\mathrm{a4}}}{\rho} + \frac{v_5^2}{2} + g\, z_5 \right)$$

Hieruit volgt voor de druk achter de turbine:

$$p_5 = p_{\mathrm{a4}} - \rho \left(\frac{v_5^2}{2} + g\, z_5 \right)$$

Voor het opgewekte vermogen in de de turbine zijn alleen de drukval over de turbine en het debiet belangrijk. Deze veranderen in eerste instantie niet bij een andere positie van de turbine. Echter wanneer de turbine meer dan ca. $10\,\mathrm{m}$, dat is de hoogte van een waterbarometer, hoger dan het wateroppervlak in de zijtak wordt geplaatst zou de druk aan stroomafwaartse zijde van de turbine negatief worden. Dat kan natuurlijk niet. Er ontstaan dan lucht- en dampbellen, dat wordt cavitatie genoemd, en de drukval over de turbine en dus het opgewekte vermogen neemt af.

$$z_{5\mathrm{max}} = \frac{p_{\mathrm{a4}}}{\rho\, g} - \frac{v_5^2}{2\, g} \approx 10.1\,\mathrm{m}$$

Opgave 11.

a. Met het oplossen van de differentiaalvergelijkingen met beginvoorwaarde zoals gegeven in de voorbeelden uit het boek vinden we voor de temperaturen T_{A} en T_{B1}:

$$\frac{T_{\mathrm{A}} - T_0}{T_{\mathrm{c}} - T_0} = 1 - \exp\left(-\frac{\phi_V\, t}{V} \right) \quad \text{respectievelijk} \quad \frac{T_{\mathrm{B1}} - T_0}{T_{\mathrm{c}} - T_0} = 1 - \exp\left(-\frac{2\,\phi_V\, t}{V} \right)$$

b. De differentiaalvergelijking voor het rechtervat van systeem B luidt:

$$\rho\, c_p\, \frac{V}{2}\, \frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{B2}}}{\mathrm{d}t} = \phi_{_V}\, \rho\, c_p\, (T_{\mathrm{B1}} - T_{\mathrm{B2}})$$

Invullen van de voorgestelde oplossing laat zien dat deze aan de differentiaalvergelijking voldoet.

$$\frac{V}{2\,\phi_{_V}} \left(-\frac{2\,\phi_{_V}}{V} \exp\left(-\frac{2\,\phi_V\, t}{V} \right) + \left(1 + \frac{2\,\phi_{_V}\, t}{V} \right) \left(\frac{2\,\phi_{_V}}{V} \right) \exp\left(-\frac{2\,\phi_V\, t}{V} \right) \right) =$$

$$1 - \exp\left(-\frac{2\,\phi_V\, t}{V} \right) - 1 + \left(1 + \frac{2\,\phi_V\, t}{V} \right) \cdot \exp\left(-\frac{2\,\phi_V\, t}{V} \right)$$

Voor $t = 0$ levert de gegeven oplossing inderdaad de begintemperatuur T_0 en voldoet daarmee aan de beginvoorwaarde.

$$\frac{T_{\mathrm{B2}} - T_0}{T_{\mathrm{c}} - T_0} = 1 - \left(1 + \frac{2\,\phi_V\, 0}{V} \right) \cdot \exp\left(-\frac{2\,\phi_V\, 0}{V} \right) = 1 - 1 = 0$$

c. Met invullen van $t = V/\phi_V$ worden de gevraagde fracties: voor systeem A 0.632 en voor systeem B 0.432 respectievelijk 0.297.

d. De resultaten voor systeem B opgeteld (0.729) laten zien dat daarin een grotere fractie van de toegevoerde warmte is opgeslagen.

Opgave 12.

a. r_{A} heeft de dimensie $\left[\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}}\right]$ en c_{A}^3 heeft dimensie $\left[\dfrac{\mathrm{kg}^3}{\mathrm{m}^9}\right]$ Daarmee krijgt de derde-orde reactiesnelheidsconstante k_{r} de dimensie $\left[\dfrac{\mathrm{m}^6}{\mathrm{kg}^2\,\mathrm{s}}\right]$

b. Steady state massabalans over een plakje $\mathrm{d}x$:

$$0 = \frac{\pi}{4} D^2 v \, (c_{\mathrm{A}}(x) - c_{\mathrm{A}}(x + \mathrm{d}x)) - k_{\mathrm{r}}\, c_{\mathrm{A}}^3 \, \frac{\pi}{4} D^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{ofwel} \quad \frac{\mathrm{d}c_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}^3} = -\frac{k_{\mathrm{r}}}{v} \, \mathrm{d}x$$

In de laatste vorm zijn de variabelen x en c_{A} gescheiden. Integreren geeft dan

$$-\frac{1}{2\,c_{\mathrm{A}}^2} = -\frac{k_{\mathrm{r}}}{v}\, x + C_1$$

C_1 is de integratieconstante die volgt uit $c_{\mathrm{A}} = c_0$ op $x = 0$. Dan wordt de volledige oplossing:

$$\frac{1}{c_{\mathrm{A}}^2} = \frac{2\,k_{\mathrm{r}}}{v}\, x + \frac{1}{c_0^2}$$

Dit kan ook geschreven worden als

$$\frac{c_{\mathrm{A}}}{c_0} = \sqrt{\frac{1}{1 + \dfrac{2\,k_{\mathrm{r}}\, x\, c_0^2}{v}}}$$

c. Opdat het linkerlid $c_{\mathrm{A}}/c_0 = 0.01$ moet de reactorlengte $x = 9999\, \dfrac{v}{2\,k_{\mathrm{r}}\, c_0^2}$

Opgave 13.

a. Een massabalans geeft

$$0 = \rho\, v_1\, A_1 - \rho\, v_2\, A_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{A_2}{A_1}\, v_2 = 2.4\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b. Met de vergelijking van Bernouilli vinden we:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = 1.1 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$$

c. De impulsbalans in de x-richting luidt:

$$0 = \rho\, v_1^2\, A_1 - \rho\, v_2^2\, A_2 + p_1\, A_1 - p_2\, A_2 + F_x$$

De kracht van behuizing op water is dan $F_x = -1286\,\mathrm{N}$, dat wil zeggen tegen de stromingsrichting in.

Opgave 14.

a.
$$V\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -\phi_{V}\,c - k_{\mathrm{r}}\,V\,c^2 \quad \text{ofwel} \quad \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -\frac{\phi_{V}}{V}\,c - k_{\mathrm{r}}\,c^2 = -k_{\mathrm{r}}\,c\left(c + \frac{\phi_{V}}{k_{\mathrm{r}}\,V}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}c}{c\left(c + \dfrac{\phi_{V}}{k_{\mathrm{r}}\,V}\right)} = -k_{\mathrm{r}}\,\mathrm{d}t$$

Als afkorting voeren we in $A = \dfrac{\phi_{V}}{k_{\mathrm{r}}\,V}$. Breuksplitsen geeft:

$$\frac{1}{c\,(c+A)} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+A}\right) \quad \text{en hiermee} \quad \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+A}\right)\mathrm{d}c = -k_{\mathrm{r}}\,A\,\mathrm{d}t$$

Integratie en invullen beginvoorwaarde geeft

$$\ln\frac{c}{c+A} = -k_{\mathrm{r}}\,A\,t + C_1 \quad \text{respectievelijk} \quad \ln\frac{c_0}{c_0+A} = C_1$$

Met als resultaat

$$\ln\left(\frac{c}{c_0}\,\frac{c_0+A}{c+A}\right) = -k_{\mathrm{r}}\,A\,t \quad \text{ofwel} \quad \ln\left(\frac{c}{c_0}\,\frac{c_0 + \dfrac{\phi_{V}}{k_{\mathrm{r}}\,V}}{c + \dfrac{\phi_{V}}{k_{\mathrm{r}}\,V}}\right) = -\frac{\phi_{V}}{V}\,t$$

b. Voor $\tau = V/\phi_{V}$, $c = c_0/e$ en $\dfrac{k_{\mathrm{r}}\,V\,c_0}{\phi_{V}} = 1$ wordt $t = -\tau\,\ln\dfrac{2}{1+e} = 0.62\,\tau$

Opgave 15.

a. Wanneer het vatvolume niet meer verandert geldt:

$$\phi_{V} = \phi_{V2} = C\,\sqrt{z_0} \text{ ofwel } C = \frac{\phi_{V}}{\sqrt{z_0}}$$

b. Een massabalans over het vat geeft nu:

$$A\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \phi_{V}\,\left(1 - \sqrt{\frac{z}{z_0}}\right)$$

c. Nu geeft het scheiden van de variabelen:

$$\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{z}{z_0}\right)}{1 - \sqrt{\dfrac{z}{z_0}}} = \frac{\phi_{V}}{z_0\,A}\,\mathrm{d}t$$

Met ook nog als nieuwe variabele $y^2 = z/z_0$ wordt de differentiaalvergelijking:

$$\frac{y\,\mathrm{d}y}{1-y} = \frac{\phi_{V}}{2\,z_0\,A}\,\mathrm{d}t \quad \text{ofwel} \quad \frac{(y-1+1)\,\mathrm{d}y}{1-y} = \frac{\phi_{V}}{2\,z_0\,A}\,\mathrm{d}t$$

Onbepaald integreren geeft dan:

$$-y - \ln(1-y) = \frac{\phi_{V}}{2\,z_0\,A}\,t + K_1$$

De integratieconstante K_1 volgt dan uit de beginvoorwaarde dat op $t = 0$ de vloeistofhoogte en daarmee y gelijk aan nul is. De oplossing wordt dan:

$$y + \ln(1 - y) = -\frac{\phi_V}{2\, z_0\, A}\, t$$

Terug naar de oorspronkelijke variabelen en parameters: wordt het verband tussen vloeistofhoogte en tijd:

$$\sqrt{\frac{z}{z_0}} + \ln\left(1 - \sqrt{\frac{z}{z_0}}\right) = -\frac{\phi_V}{2\, z_0\, A}\, t$$

Opgave 16.

a.

$$\rho\, c_p\, V\, \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \rho\, c_p\, \phi_V\, (T_1 + \Delta T\, \sin(\omega\, t) - T)$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\phi_V}{V}\, T = \frac{\phi_V}{V}\, (T_1 + \Delta T\, \sin(\omega\, t))$$

b. Invullen van de voorgestelde particuliere oplossing geeft:

$$-b_2\, \omega\, \sin(\omega\, t) + b_3\, \omega\, \cos(\omega\, t) + \frac{\phi_V}{V}\, (b_1 + b_2\, \cos(\omega\, t) + b_3\, \sin(\omega\, t)) =$$

$$\frac{\phi_V}{V}\, (T_1 + \Delta T\, \sin(\omega\, t))$$

Dit geeft $b_1 = T_1$ en tevens:

$$-b_2\, \omega + b_3\, \frac{\phi_V}{V} = \frac{\phi_V}{V}\, \Delta T$$

$$b_3\, \omega + b_2\, \frac{\phi_V}{V} = 0$$

en tenslotte:

$$b_2 = \frac{-1}{\dfrac{\omega\, V}{\phi_V} + \dfrac{\phi_V}{\omega\, V}}\, \Delta T \quad \text{en} \quad b_3 = \frac{\dfrac{\phi_V}{\omega\, V}}{\dfrac{\omega\, V}{\phi_V} + \dfrac{\phi_V}{\omega\, V}}\, \Delta T$$

c. De amplitudefluctuatie aan de uitgang wordt gevonden met

$$\sqrt{b_2^2 + b_3^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega\, V}{\phi_V}\right)^2}}\, \Delta T$$

Voor een amplitudereductie met een factor 3 dient dan $\dfrac{\omega\, V}{\phi_V} = 2\sqrt{2}$ te zijn.

Opgave 17.

a. Een eenvoudige massabalans geeft:

$$V = \frac{V_0}{3} + \phi_V\, t \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2\, V_0}{3\, \phi_V}$$

b. De inwendige energie in het vat verandert door de toegevoerde vloeistof en de afgevoerde warmte.

$$\rho V \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \rho u \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \rho \phi_V u_1 - K_0 (T - T_0)$$

$$\rho c_p \left(\frac{V_0}{3} + \phi_V t\right) \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \rho \phi_V c_p T = \rho \phi_V c_p T_1 - K_0 (T - T_0)$$

$$\left(\frac{V_0}{3 \phi_V} + t\right) \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + T = T_1 - \frac{K_0}{\rho c_p \phi_V} (T - T_0) = T_1 - A (T - T_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{T_1 + A T_0 - (1 + A) T} = \frac{\mathrm{d}t}{t + \dfrac{V_0}{3 \phi_V}}$$

c. Met de beginvoorwaarde wordt uiteindelijk gevonden:

$$\frac{T_1 + A T_0 - (1 + A) T}{T_1 - T_0} = \left(\frac{1}{1 + \dfrac{3 \phi_V t}{V_0}}\right)^{1+A}$$

Voor $A = 1$ en $t = \tau$ wordt dan:

$$T = \frac{4 T_1 + 5 T_0}{9}$$