TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
donderdag 26 januari 2012, 18:30-21:30

1. In deze opgave maken we gebruik van de Trapeziummethode voor de integratie van het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$ met $y(t_0) = y_0$:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1})\right) \tag{1}$$

   (a) Laat zien dat de versterkingsfactor van de Trapeziummethode gegeven wordt door
$$Q(h\lambda) = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}}.$$
(2 pt.)

   (b) Geef de orde (+ bewijs) van de lokale afbreekfout van de Trapeziummethode voor de testvergelijking. *Hint:* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,\qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$ (3 pt.)

   (c) Toon aan dat voor een algemene complexe $\lambda = \mu + i\nu$ de methode stabiel is voor elke stapgroote $h > 0$ als $\mu \leq 0$. (2 pt.)

   (d) Doe één stap met de Trapeziummethode voor het volgende beginwaardeprobleem
$$y' = -(1 + t)y + t,\ \text{met } y(0) = 1,$$
en stapgrootte $h = 1$. (1.5 pt.)

   (e) Maak voor dit probleem (gegeven in onderdeel d) een vergelijking van de Trapeziummethode en de Euler Voorwaarts methode. Aan welke methode geeft u de voorkeur (+ motivatie)? (1.5 pt.)

[0] **voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. In de eerste drie onderdelen van deze opgave maken we gebruik van een hypothetische computer die met floating point (decimale) getallen kan rekenen. Deze computer heeft de volgende specificaties:

   - Ieder reëel getal wordt voorgesteld als floating point number met vier cijfers achter de komma;
   - De floating point weergave vindt plaats door *afronding*.

   Dus als voorbeeld: $fl(5/7) = fl(0.714285714\ldots) = 0.7143 \cdot 10^0$. In de opgave beschouwen we volgende twee gegeven getallen $x = 2/3 = 0.666666666\ldots$ en $y = 1999/3000 = 0.666333333\ldots$.

   [a] Bereken $x + y$, $x - y$, $fl(fl(x) + fl(y))$ en $fl(fl(x) - fl(y))$, met de hierboven gegeven waarden voor x en y, als exacte uitkomsten en computerweergaven van deze uitkomsten. (1.5 pt)

   [b] Geef de relatieve fout die optreedt als gevolg van de afronding in de berekeningen door onze computer voor $x + y$ en $x - y$. (1.5 pt)

   [c] Geef een motivatie waarom de relatieve fout in het algemeen als $x \approx y$ voor $x - y$ dramatisch hoger ligt dan voor $x + y$ onder aanname dat $x, y > 0$. (2 pt)

   In the tweede deel van deze som, beschouwen we het volgende randwaardeprobleem (differentiaalvergelijking met randvoorwaarden):

$$\begin{cases} -y'' + xy = x^3 - 2, x \in (0,1) \\ y'(0) = 0, \quad y(1) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

   [d] Laat h de stapgrootte zijn. Geef een discretisatie met een fout van $O(h^2)$ (+ bewijs) zo dat $x_n = 1$. Gebruik een virtueel gridpunt bij $x = 0$. (3pt.)

   [e] Gebruik een stapgrootte van $h = 1/3$ om het stelsel vergelijkingen af te leiden. Verwerk de randvoorwaarden. Het afgeleide stelsel moet 3×3 zijn (drie onbekenden en drie vergelijkingen). (2pt.)