TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
donderdag 30 juni 2011, 18:30-21:30

1. We beschouwen de numerieke integratie van het volgende beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. We gebruiken de voorwaartse methode van Euler om de numerieke oplossing van dit beginwaardeprobleem te bepalen. Deze methode is gegeven door
$$w_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n), \tag{1}$$
waarin h de tijdstap en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

   a Bepaal, met gedegen toelichting, de orde van de locale afbreekfout. (2.5pt.)

   b We beschouwen het volgende tweede orde beginwaardeprobleem
$$\begin{cases} y'' + \varepsilon y' + y = sin(t), \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$
Herschrijf, met gedegen toelichting, dit beginwaardeprobleem in de vorm van een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen. Neem ook de beginvoorwaarden mee. (1pt.)

   We gaan verder met het volgende stelsel beginwaardeproblemen
$$\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = y_1 + \varepsilon y_2, \end{cases} \tag{3}$$
met beginvoorwaarden $y_1(0) = 1$ en $y_2(0) = 2$, en verder is $\varepsilon \in \mathbb{R}$ een gegeven constante.

   c Wat is de maximaal toelaatbare waarde van h voor numerieke stabiliteit als $\varepsilon = 0$? Geef een gedegen toelichting. (2.5pt.)

   d Voor welke waarden van ε is het gegeven stelsel (analytisch) stabiel? Geef een goede toelichting. (2pt.)

   We onderzoeken de numerieke stabiliteit met de voorwaartse methode van Euler voor het gegeven stelsel beginwaardeproblemen voor algemene waarden van ε.

   e Wat is de maximaal toelaatbare waarde van h voor numerieke stabiliteit indien $-2 \leq \varepsilon < 0$? Licht het antwoord toe. (2pt.)

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. Gegeven het volgende randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} -y'' + x^2 y = x, \text{ voor } x \in (0,1) \\ \\ y(0) = 0, y(1) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

We benaderen de oplossing van dit probleem met behulp van eindige differenties. De roosterpunten worden gegeven door $x_j = jh$, $j \in \{0, \ldots, n+1\}$ met $h = \dfrac{1}{n+1}$.

a Geef een discretisatie (+bewijs) van $-y'' + x^2 y = x$ waarbij de lokale afbreekfout van de orde $O(h^2)$ is. (3 pt)

b Geef voor $n = 3$ het stelsel $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ waaraan de numerieke oplossing $\mathbf{w}$ moet voldoen. (2 pt)

c Gegeven is het iteratieproces $x_{n+1} = g(x_n)$, met

$$g(x_n) = x_n + h(x_n)(x_n^2 - 4),$$

waarbij h een continue functie is met $h(x) \neq 0$ voor elke $x \neq 0$. Als dit proces convergeert, naar welke limiet(en) p convergeert het dan? (1pt.)

d Beschouw drie mogelijke keuzen voor $h(x)$:

i. $h_1(x) = -\frac{1}{2}x$
ii. $h_2(x) = -\frac{1}{3}$
iii. $h_3(x) = -\frac{1}{2x}$

We beperken ons tot de limiet $p > 0$. Voor welke keuze kan het proces niet convergeren? Voor welke keuze convergeert het proces het snelst? Motiveer uw antwoord. (2pt.)

e Doe 3 iteraties met de keuze $h_2(x) = \frac{1}{3}$ met startwaarde $x_0 = 3$. (1pt.)

f We beschouwen nu het geval waarin we het nulpunt p van een gegeven functie f bepalen. $\hat{f}$ is de functie verstoord door meetfouten. Er is gegeven dat $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon_{max}$ voor alle x. Laat zien dat voor het nulpunt $\hat{p}$ van $\hat{f}$ geldt $|\hat{p} - p| \leq \frac{\epsilon_{max}}{|f'(p)|}$. (1pt.)