TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
donderdag 20 januari 2011, 18:30-21:30

1. De modified Euler methode voor de integratie van beginwaarde probleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, is gegeven door

$$\begin{cases} w_{n+1}^* = w_n + hf(t_n, w_n) \\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{h}{2}\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1}^*)\right), \end{cases} \tag{1}$$

waarin h de tijdstap en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

(a) Toon aan dat de locale afbreekfout van de modified Euler methode van de orde $O(h^2)$ is. (U mag hier niet de testvergelijking gebruiken.) (3pt.)

Gegeven het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = \cos t, \\ y(0) = 1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 2. \end{cases} \tag{2}$$

(b) Laat zien dat bovenstaand beginwaarde probleem geschreven kan worden als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Geef ook de beginvoorwaarden voor $x_1(0)$ en $x_2(0)$. (1pt.)

(c) Bereken één stap met de modified Euler methode, waarbij $h = 0.1$ en $t_0 = 0$ met de gegeven beginvoorwaarden. (2pt.)

(d) Leid de versterkingsfactor voor de modified Euler methode af. (2pt.)

(e) Bepaal voor welke stapgrootte $h > 0$ de modified Euler methode toegepast op beginwaarde probleem (2), stabiel is. (2pt.)

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. In deze opgave beschouwen we twee numerieke methoden voor het oplossen van niet-lineaire vergelijkingen.

   (a) We bepalen het nulpunt van een algemene gegeven functie $f(x)$ die een continue afgeleide heeft. We gebruiken een vaste punts methode van Picard, met

   $$p_{k+1} = g(p_k) = p_k - \frac{f(p_k)}{\alpha}, \text{ waarin } \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Stel dat p een vast punt is, laat zien dat als $0 < f'(p) < \alpha$ de bovenstaande keuze voor $g(x)$ altijd convergentie oplevert voor een beginschatting p_0 gekozen voldoende dicht bij p. (3pt.)

   Gegeven is de Newton-Raphson methode

   $$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}.$$

   (b) Leid de bovenstaande Newton-Raphson methode af. (2pt.)

   (c) We zoeken het positieve nulpunt van $f(x) = x^2 - 2x - 2$. Neem als startwaarde $p_0 = 2$ en bepaal p_1 met de Newton-Raphson methode. (1pt.)

   (d) Motiveer waarom de startwaarde $p_0 = 1$ geen logische keuze is voor de Newton-Raphson methode. (2pt.)

   (e) We voeren nu een interpolatie uit op een functie $y = y(x)$ met steunpunten $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ en (1,1).

   - Geef de formule voor het lineaire interpolatiepolynoom $P(x)$ met steunpunten $y(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$ en $y(1) = 1$. (1pt.)
   - Bepaal het punt $\tilde{x}$ waar $P(\tilde{x}) = \frac{1}{2}$ met behulp van steunpunten in het eerste onderdeel van deze vraag. (Dit is inverse lineaire interpolatie ofwel Regula-Falsi.) (1pt.)