TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
donderdag 25 augustus 2011, 18:30-21:30

1. We beschouwen de volgende predictor-corrector methode voor de integratie van het beginwaardeprobleem $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} w_{n+1}^* &= w_n + hf(t_n, w_n), \\ w_{n+1} &= w_n + h\left((1-\theta)f(t_n,w_n) + \theta f(t_{n+1}, w_{n+1}^*)\right), \end{aligned} \tag{1}$$

waarin h de tijdstap, θ een reëel getal ($0 \le \theta \le 1$) en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

   (a) Toon aan dat de locale afbreekfout van de bovenstaande methode voor $0 \le \theta \le 1$ van de orde $O(h)$ en voor $\theta = \frac{1}{2}$ van de orde $O(h^2)$ is (*N.B. Dit moet afgeleid worden voor de algemene differentiaalvergelijking* $y' = f(t,y)$). (3 pt)

   (b) Leid af dat de versterkingsfactor van deze methode gegeven wordt door

$$Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \theta(h\lambda)^2.$$

(2 pt)

   (c) Gegeven is het tweede orde beginwaardeprobleem:

$$y'' + 4y' + 8y = t^2 - 1, y(0) = 0 \text{ en } y'(0) = 1.$$

Schrijf dit als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Geef f en g en laat zien dat $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$. ($1\frac{1}{2}$ pt)

   (d) Doe één stap met de methode gegeven in (1) met $h = 1$ en $\theta = \frac{1}{2}$. ($1\frac{1}{2}$ pt)

   (e) Voor welke $\theta \in [0,1]$ is de methode gegeven in (1) met $h = 1$ stabiel bij het toepassen op het stelsel gegeven in onderdeel (c). Geef een duidelijke motivatie. (2 pt)

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. (a) We zoeken een formule van de vorm:

$$Q(h) = \frac{\alpha_0}{h^2} f(0) + \frac{\alpha_1}{h^2} f(h) + \frac{\alpha_2}{h^2} f(2h),$$

zodat

$$f''(0) - Q(h) = O(h).$$

Geef het lineaire stelsel vergelijkingen waar α_0, α_1 en α_2 aan moeten voldoen. (2 pt)

(b) De oplossing van het in het vorige onderdeel afgeleide stelsel wordt gegeven door $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -2$ en $\alpha_2 = 1$. Geef voor deze waarden een uitdrukking voor de afbreekfout $f''(0) - Q(h)$. (2 pt)

(c) Gebruik de getallen gegeven in Tabel 1. Geef met behulp van de Richardson

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{4}$	0.0156
$\frac{1}{2}$	0.1250
$\frac{3}{4}$	0.4219
1	1.0000

Tabel 1: De gebruikte waarden

methode een schatting van de fout: $f''(0) - Q(\frac{1}{4})$. (2 pt)

(d) Gegeven is dat de tabelwaarden een maximale afrondfout hebben van ϵ: $|f(x) - \hat{f}(x)| \leq \epsilon$. Laat zien, dat voor de afrondfout in de benadering geldt:

$$|Q(h) - \hat{Q}(h)| \leq \frac{C_1 \epsilon}{h^2}$$

en geef C_1 en ϵ. (2 pt)

(e) Als gegeven is dat $f''(0) - Q(h) = 6h$, geef dan de optimale waarde van h zodat de totale fout $|f''(0) - \hat{Q}(h)|$ minimaal is. (2 pt)