TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
donderdag 14 april 2011, 18:30-21:30

1. We beschouwen de volgende numerieke tijdsintegratiemethode

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\alpha f(t_n, y_n) + \beta f(t_{n-1}, y_{n-1})\right). \tag{1}$$

   (a) Laat zien dat voor $\alpha = \frac{3}{2}$ en $\beta = -\frac{1}{2}$ de locale afbreekfout $\mathcal{O}(h^2)$ is. *Hint: Gebruik $y'_{n-1} = f(t_{n-1}, y_{n-1})$, waarin $f(t_{n-1}, y_{n-1})$ verkregen kan worden door een Taylorpolynoom van y' rond t_n.* (3pt.)

   (b) Gebruik de testvergelijking om de versterkingsfactor af te leiden. *Hint:* $y_j = [Q(h\lambda)]y_{j-1}$. (2pt.)

   (c) Laat zien dat de methode stabiel is voor $h \leq -\frac{1}{\lambda}$ als λ een reëel en negatief getal is. (2pt.)

   Beschouw het stelsel

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(t) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

   (d) Bereken de eigenwaarden van de matrix in (2). Bepaal de waarden van h waarvoor het schema stabiel is als we dit toepassen op (2). (2pt.)

   (e) Voor welke waarden van h convergeert het schema in (1)? (1pt.)

2. We onderzoeken Lagrange interpolatie. Voor gegeven steunpunten x_0, x_1 …, x_n met bijbehorende functiewaarden $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$, wordt het interpolatiepolynoom $p_n(x)$, gegeven door

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x), \text{ met} \\ L_i(x) &= \frac{(x-x_0)(\ldots)(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(\ldots)(x-x_n)}{(x_i-x_0)(\ldots)(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(\ldots)(x_i-x_n)}. \end{aligned} \tag{3}$$

   Verder zijn de volgende meetwaarden gegeven in tabelvorm:

[0] **voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1
1	1	2
2	2	4

(a) Geef het lineaire interpolatiepolynoom van Lagrange met steunpunten x_0 en x_1. (1pt.)

(b) Geef de kwadratische interpolatieformule van Lagrange met steunpunten x_0, x_1 en x_2. (2pt.)

(c) Benader $f(0.5)$ eerst met lineaire interpolatie en dan met kwadratische interpolatie. (2pt.)

(d) Stel dat de functiewaarden in de tabel een meetfout bevatten met grootte van ten hoogste ε.

i Laat zien dat de fout, ten gevolge van de onnauwkeurigheid van de meetdata, voor lineaire interpolatie binnen steunpunten x_0 en x_1 begrensd is. (1pt.)

ii Hoe zit dit voor lineaire extrapolatie buiten de steunpunten x_0 en x_1? Geef een motivatie (met name voor het geval dat x ver buiten het interval van de steunpunten ligt). (1pt.)

(e) We beschouwen de trapeziumregel voor numerieke integratie.

i Leid met behulp van het lineaire interpolatiepolynoom de trapeziumregel om $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ te benaderen af. (1.5pt.)

ii Leid af dat de afbreekfout van de enkelvoudige trapeziumregel over het interval $[x_0, x_1]$ gegeven is door

$$\frac{1}{12}(x_1 - x_0)^3 \max_{x \in [x_0, x_1]} |f''(x)|, \tag{4}$$

indien de tweede orde afgeleide van $f(x)$ continu is op $[x_0, x_1]$. *Hint: De fout voor lineaire interpolatie over steunpunten x_0 en x_1 wordt gegeven door*

$$f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1)f''(\chi), \text{ voor zekere } \chi \in (x_0, x_1),$$

waarin $p_1(x)$ het lineaire interpolatiepolynoom voorstelt. (1.5pt.)