TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
donderdag 21 januari 2010, 18:30-21:30

1. De θ-methode om het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, te integreren, wordt gegeven door

$$w_{n+1} = w_n + h\left[\theta f(t_n, w_n) + (1-\theta) f(t_{n+1}, w_{n+1})\right]. \tag{1}$$

Hierin stellen h en w_n achtereenvolgens de tijdstap en numerieke oplossing voor op tijdstip t_n. Verder stellen we $0 \leq \theta \leq 1$.

(a) Bepaal de versterkingsfactor voor de θ-methode. (2pt.)

(b) Wat is de waarde van θ die ervoor zorgt dat de methode een locale afbreekfout van $O(h)$ heeft? Welke waarde van θ is nodig om een locale afbreekfout van $O(h^2)$ te hebben? (Hint: gebruik hier de test vergelijking, $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ en $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.) (3pt.)

(c) We beschouwen het volgende beginwaardeprobleem

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \tag{2}$$

met beginvoorwaarden $y_1(0) = 1$ en $y_2(0) = 0$.

Bereken de numerieke oplossing na één tijdstap met de θ-methode. Neem $h = 0.1$ en $\theta = 0.5$, en gebruik de gegeven beginvoorwaarde. (2pt.)

(d) Leid een stabiliteitsvoorwaarde af voor de tijdstap h als de θ-methode toegepast wordt op het stelsel uit opgave c voor $0 \leq \theta \leq 1$. (2pt.)

(e) Convergeert de numerieke oplossing naar de exacte oplossing van het stelsel uit opgave c? Indien dit zo is, leg uit waarom. (1pt.)

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. (a) We zoeken een differentie formule voor de eerste afgeleide van f in het punt $x = 0$ van de vorm:

$$Q(h) = \frac{\alpha_0}{h} f(0) + \frac{\alpha_1}{h} f(h) + \frac{\alpha_2}{h} f(2h),$$

zodat

$$f'(0) - Q(h) = O(h^2).$$

Laat zien dat de coefficienten $\alpha_0, \ \ \alpha_1$ en α_2 moeten voldoen aan het volgende stelsel:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\alpha_0}{h} & + & \frac{\alpha_1}{h} & + & \frac{\alpha_2}{h} & = & 0\ , \\ & & \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & = & 1\ , \\ & & \frac{h}{2}\alpha_1 & + & 2h\alpha_2 & = & 0 \end{array}$$

en bepaal de oplossing van dit stelsel. (3pt.)

(b) $\hat{f}$ is de functie verstoord door meetfouten. Er is gegeven dat $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon_{max}$ voor alle x. Geef een bovengrens voor $|\hat{Q}(h) - Q(h)|$ als $\hat{Q}(h)$ bepaald is met behulp van $\hat{f}$. (1pt.)

(c) Stel de afbreekfout is gegeven door $4h^2$ en de meetfout $|\hat{Q}(h) - Q(h)|$ is $\frac{1}{h}$. Geef de stapgrootte h zodat de totale fout minimaal is. (2pt.)

(d) Gegeven is het iteratieproces $x_{n+1} = g(x_n)$, met

$$g(x_n) = x_n + h(x_n)(x_n^3 - 3),$$

waarbij h een continue functie is met $h(x) \neq 0$ voor elke $x \neq 0$. Als dit proces convergeert, naar welke limiet p convergeert het dan? (1pt.)

(e) Beschouw drie mogelijke keuzen voor $h(x)$:

i. $h_1(x) = -\frac{1}{x^4}$
ii. $h_2(x) = -\frac{1}{x^2}$
iii. $h_3(x) = -\frac{1}{3x^2}$

Voor welke keuze kan het proces niet convergeren? Voor welke keuze convergeert het proces het snelst? Motiveer uw antwoord. (2pt.)

(f) p is een nulpunt van een gegeven functie f. $\hat{f}$ is de functie verstoord door meetfouten. Er is gegeven dat $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon_{max}$ voor alle x. Laat zien dat voor het nulpunt $\hat{p}$ van $\hat{f}$ geldt $|\hat{p} - p| \leq \frac{\epsilon_{max}}{|f'(p)|}$. (1pt.)