TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
donderdag 26 augustus 2010, 18:30-21:30

1. We beschouwen het beginwaardeprobleem

$$y' = f(t, y), \qquad y(0) = y_0,$$

dat opgelost wordt met gebruik van de achterwaartse Euler tijdsintegratie methode.

$$w_{n+1} = w_n + hf(t_{n+1}, w_{n+1}).$$

a Gebruik de testvergelijking, $y' = \lambda y$, om aan te tonen dat de locale afbreekfout bij toepassing van de achterwaartse methode van Euler van de orde $O(h)$ is. *Hint:* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,\qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots.$ (3 pt.)

b Gebruik de testvergelijking, $y' = \lambda y$, om aan te tonen dat voor een algemene complexe $\lambda = \mu + i\nu$ de methode stabiel is als

$$(1 - h\mu)^2 + (h\nu)^2 \geq 1.$$

Schets het stabiliteitsgebied in het complexe vlak. (3 pt.)

We passen de achterwaartse methode van Euler toe op het volgende stelsel

$$\begin{array}{l} y_1' = y_1(1 - (y_1 + 3y_2)) = f_1(y_1, y_2), \\ y_2' = y_2(1 - (y_1 + y_2)) = f_2(y_1, y_2). \end{array} \qquad (1)$$

We bekijken het gedrag van de numerieke methode rond evenwicht $(y_1, y_2) = (0, 1)$.

c Leid de Jacobi matrix af door linearisering van stelsel (1) rond $(y_1, y_2) = (0, 1)$, en geef zijn eigenwaarden. (2 pt.)

d
- Bepaal de maximaal toelaatbare tijdstap rond $(y_1, y_2) = (0, 1)$ waarvoor lineaire stabiliteit gegarandeerd wordt als men de achterwaartse methode van Euler gebruikt.
- Doe hetzelfde voor het geval waarin men de voorwaartse methode van Euler gebruikt voor de numerieke tijdsintegratie.

(2 pt.)

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. Van een voertuig wordt de snelheid geschat. De toegestane maximumsnelheid is 40 m/s. De gemeten posities van het voertuig staan in de onderstaande tabel.

t (s)	0	1	2
$f(t)$ (m)	200	215	250

(a) Geef de 1^e orde achterwaartse differentieformule en bepaal hiermee een schatting van de snelheid op $t = 2$ ($f'(2)$). (1 pt.)

(b) We zoeken een differentie formule voor de eerste afgeleide van f in het punt $2h$ van de vorm:

$$Q(h) = \frac{\alpha_0}{h} f(0) + \frac{\alpha_1}{h} f(h) + \frac{\alpha_2}{h} f(2h),$$

zodat

$$f'(2h) - Q(h) = O(h^2).$$

In de rest van de opgave werken we verder met deze formule. Laat zien dat de coefficienten α_0, α_1 en α_2 moeten voldoen aan het volgende stelsel:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \frac{\alpha_0}{h} & + & \frac{\alpha_1}{h} & + & \frac{\alpha_2}{h} & = & 0\ , \\ -2\alpha_0 & - & \alpha_1 & & & = & 1\ , \\ 2\alpha_0 h & + & \frac{1}{2}\alpha_1 h & & & = & 0\ . \end{array}$$

(2 pt.)

(c) De oplossing van dit stelsel wordt gegeven door $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = -2$ en $\alpha_2 = \frac{3}{2}$. Geef voor deze waarden een uitdrukking voor de afbreekfout $f'(2h) - Q(h)$. Geef opnieuw een schatting van de snelheid. (2 pt.)

(d) De gemeten posities hebben een maximale meetfout van ϵ: $|f(t) - \hat{f}(t)| \leq \epsilon$. Laat zien, dat voor de meetfout in de benadering geldt:

$$|Q(h) - \hat{Q}(h)| \leq \frac{C_1 \epsilon}{h}$$

en geef C_1. (1.5 pt.)

(e) We nemen aan dat de meetfout kleiner is dan 1.25 (m). Kan op grond van deze gegevens geconcludeerd worden dat het voertuig te snel reed (+motivatie)? (1.5 pt.)

(f) Geef ook een schatting van $f''(2)$ en de meetfout in deze schatting. Conclusie? (2 pt.)