TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
donderdag 15 april 2010, 18:30-21:30

1. a De vierde orde Runge-Kutta method (RK_4) voor de differentiaalvergelijking $y' = f(t, y)$ wordt gegeven door de volgende formules:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, w_n) \\ k_2 &= hf(t_n + \tfrac{1}{2}h, w_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(t_n + \tfrac{1}{2}h, w_n + \tfrac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(t_n + h, w_n + k_3) \end{aligned}$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Bepaal de versterkingsfactor $Q(h\lambda)$ van RK_4 door de methode toe te passen op de homogene testvergelijking $y' = \lambda y$. (2pt.)

b Gebruik het feit dat $y(t_{n+1}) = e^{h\lambda}y(t_n)$ geldt voor de exacte oplossing van $y' = \lambda y$ om te laten zien dat RK_4 toegepast op de homogene testvergelijking een lokale afbreekfout heeft van $O(h^4)$. (Hint: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...$) (2pt.)

In de volgende onderdelen mag je aannemen dat dit resultaat ook geldt voor stelsels, zodat de globale fout van RK_4 toegepast op (1) gelijk is aan $O(h^4)$.

We beschouwen het volgende tweede orde beginwaarde problem:

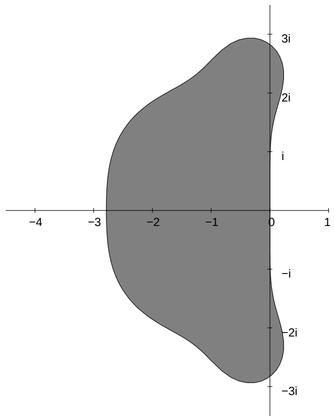
$$y'' + py' + qy = \sin t, \quad y(0) = y_0, \; y'(0) = y_0'. \tag{1}$$

c Schrijf (1) als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen van het type $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$. Geef $\mathbf{A}$ en $\mathbf{g}$ en bepaal de eigenwaarden van $\mathbf{A}$, voor willekeurige p en q. (2pt.)

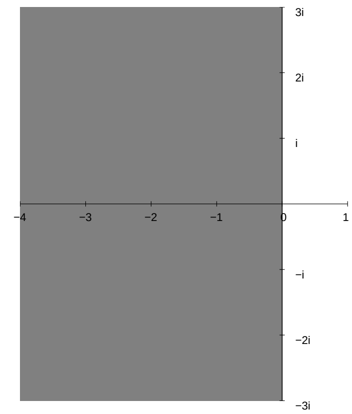
d We nemen nu p=1000 en q=250001. Geef een benadering van de stabiliteitsvoorwaarde voor dit geval. Hint: gebruik onderstaand figuur van het stabiliteitsgebied van RK_4. (2pt.)

e Stel dat je een keuze moet maken tussen de Trapeziumregel en RK_4 om het probleem gegeven in (d) op te lossen. Motiveer je keuze zo goed mogelijk. Hierbij moeten aan de orde komen: de stabiliteitsvoorwaarde en de orde van grootte van de globale fout. (2pt.)

[0] **voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**



Figuur 1: Stabiliteitsgebied voor RK_4



Figuur 2: Stabiliteitsgebied voor de Trapeziumregel

2. We beschouwen het volgende randwaardeprobleem (differentiaalvergelijking met randvoorwaarden):

$$\left\{ -y'' + xy = x^3 - 2, y'(0) = 0, \quad y(1) = 1. \right. \tag{2}$$

a Laat zien dat $y(x) = x^2$ de oplossing is van het probleem (2). (1pt.)

b Laat h de stapgrootte zijn, geef een discretisatie met een lokale afbreekfout van $O(h^2)$ (+ bewijs). Gebruik een virtueel gridpunt bij $x = 0$. (2pt.)

c Gebruik een stapgrootte van $h = 1/3$ om het stelsel vergelijkingen af te leiden. Verwerk de randvoorwaarden en het afgeleide stelsel moet 3×3 zijn (drie onbekenden en drie vergelijkingen). (2pt.)

d Geef de numerieke oplossing als een stapgrootte van $h = 1/3$ gebruikt wordt. Waarom is de fout gelijk aan nul? (1pt.)

Vervolgens beschouwen we de oplossing $y(x) = x^2$ op gridpunten $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$ en $x_3 = 1$. We willen de integraal $\int_0^1 y(x)dx$ numeriek benaderen.

e i Geef de Rechthoek- en Trapeziumregel. Geef ook de bijbehorende samengestelde integratieregels. (1pt.)

ii Benader de integraal $\int_0^1 y(x)dx$ met behulp van beide integratieregels , met $h = 1/3$ (1pt.)

f Stel dat men $\int_0^1 y(x)dx$ benadert, dan is de grootte van de fout van de samengestelde regels (ε_R en ε_T voor de Rechthoek- en Trapeziumregel, respectievelijk) begrensd door

$$\varepsilon_R \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [0,1]} |y'(x)|, \quad \varepsilon_T \leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [0,1]} |y''(x)|. \tag{3}$$

Welke methode verdient de voorkeur als het aantal integratiepunten groot is? Geef een gegronde redenering. (2pt.)