TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
dinsdag 31 maart 2009, 14:00-17:00

1. We beschouwen de volgende predictor-corrector methode voor de integratie van het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} w^*_{n+1} &= w_n + hf(t_n, w_n), \\ w_{n+1} &= w_n + h\left((1-\theta)f(t_n, w_n) + \theta f(t_{n+1}, w^*_{n+1})\right), \end{aligned} \tag{1}$$

waarin h de tijdstap, θ een reëel getal ($0 \leq \theta \leq 1$) en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

(a) Toon aan dat de locale afbreekfout van de bovenstaande methode voor $0 \leq \theta \leq 1$ van de orde $O(h)$ en voor $\theta = \frac{1}{2}$ $O(h^2)$ is (*N.B. Dit moet afgeleid worden voor de algemene differentiaalvergelijking* $y' = f(t, y)$). (3 pt)

(b) Leid af dat de versterkingsfactor van deze methode gegeven wordt door

$$Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \theta(h\lambda)^2.$$

(2 pt)

(c) Gegeven is het tweede orde beginwaardeprobleem:

$$y'' + 2y' + 2y = t, y(0) = 0 \text{ en } y'(0) = 1.$$

Schrijf dit als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Geef f en g en laat zien dat $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. ($1\frac{1}{2}$ pt)

(d) Doe één stap met de methode gegeven in (1) met $h = 1$ en $\theta = \frac{1}{2}$. ($1\frac{1}{2}$ pt)

(e) Voor welke $\theta \in [0, 1]$ is de methode gegeven in (1) met $h = 2$ stabiel bij het toepassen op het stelsel gegeven in onderdeel c. Geef een duidelijke motivatie. (2 pt)

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. We lossen de volgende vergelijking op

$$x \sin(x) = \frac{\pi}{8}\sqrt{2}, \tag{2}$$

waarin we geinteresseerd zijn in één van de oplossingen: $\tilde{x} = \frac{\pi}{4}$. Hiertoe beschouwen we twee vaste punt methoden, gegeven door

$$p_{k+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8\sin(p_k)} =: g_1(p_k), \tag{3}$$

$$q_{k+1} = q_k - (q_k \sin(q_k) - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}) =: g_2(q_k). \tag{4}$$

a Voer één iteratieslag uit met beide methoden waarin $p_0 = q_0 = \frac{\pi}{2}$, en toon aan dat een vast punt van $g_1(x)$ en $g_2(x)$ een oplossing is van vergelijking (2).(2 pt.)

Gegeven de algemene vaste punt methode $p_{k+1} = g(p_k)$. Aannemende dat dit proces convergeert, dan kan als $g(x)$ een continue afgeleide heeft, de volgende relatie worden aangetoond

$$|p_{k+1} - p| = |g'(\xi_k)||p_k - p|, \tag{5}$$

voor een zekere ξ_k tussen p en p_k.

b Gebruik vergelijking (5) om te bepalen welk schema (vergelijking (3) of (4)) de snelste convergentie levert voor grote waarden van k. (2 pt.)

We gebruiken vervolgens het Newton-Raphson schema, gegeven door

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}.$$

We nemen aan dat $f(x)$ een continue tweede afgeleide heeft.

c Voer één stap uit met dit Newton-Raphson schema met beginschatting $z_0 = \frac{\pi}{2}$, voor het bepalen van $\tilde{x}$. (2 pt.)

d Leid de Newton-Raphson methode af. (2 pt.)

e Laat z de oplossing van $f(z) = 0$ zijn. Toon aan dat dan geldt

$$|z - z_{k+1}| = K|z - z_k|^2, \text{ voor } k \to \infty \tag{6}$$

en bepaal de waarde van de constante K. (2 pt.)