TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT

FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)

dinsdag 27 januari 2009, 9:00-12:00

1. In deze opgave beschouwen we predictor-corrector methoden van het volgende type:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, w_n) \\ k_2 &= hf(t_n + h, w_n + k_1) \\ w_{n+1} &= w_n + \beta\, k_1 + (1-\beta)\, k_2. \end{aligned} \tag{1}$$

   a) Toon aan, voor de algemene vergelijking $y' = f(t, y)$, dat de lokale afbreekfout $O(h^2)$ is voor $\beta = \frac{1}{2}$ en $O(h)$ voor alle andere waarden van β. (3 pt)

   b) Bepaal de versterkingsfactor voor willekeurige β. (2 pt)

   c) De methode (1) kan worden toegepast op het stelsel

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{2}$$

   Toon aan dat de stapgrootte h moet voldoen aan

$$h^2 < \frac{1-2\beta}{(1-\beta)^2} \tag{3}$$

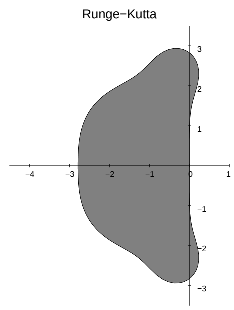
   om (2) stabiel te kunnen integreren. Voor welke waarden van β is stabiele integratie mogelijk? (2 pt)

   d) Toon aan dat de stabiliteitsgrens in (3) optimaal wordt voor $\beta = 0$ en geef deze stabiliteitsgrens. (Hint: de afgeleide van $\frac{1-2\beta}{(1-\beta)^2}$ is gelijk aan $\frac{-2\beta}{(1-\beta)^3}$). (1 pt)

   e) Als alternatief zouden we ook de vierde orde methode van Runge-Kutta kunnen gebruiken. Aan welke van de twee methoden, Runge-Kutta of (1), zou U de voorkeur geven om het stelsel (2) te integreren, *als gegeven is dat de oplossing niet erg nauwkeurig hoeft te zijn?* (Hint: Runge-Kutta gebruikt 4 functie-evaluaties per tijdstap. Het stabiliteitsgebied staat op de volgende pagina.) (2 pt)

---

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**



2. Gegeven het volgende randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} -y'' + xy = x^2, \text{ voor } x \in (0,1) \\ \\ y(0) = 1, y(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

We benaderen de oplossing van dit probleem met behulp van eindige differenties. De roosterpunten worden gegeven door $x_j = jh$, $j \in \{0, \ldots, n+1\}$ met $h = \dfrac{1}{n+1}$.

a Geef een discretisatie (+bewijs) van $-y'' + xy = x^2$ waarbij de lokale afbreekfout van de orde $O(h^2)$ is. (3 pt)

b Geef voor $n = 3$ het stelsel $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ waaraan de numerieke oplossing $\mathbf{w}$ moet voldoen. (2 pt)

In het vervolg van de opgave wordt het volgende probleem bekeken:

$$-y''(x) = 1, \text{ voor } x \in (0,1), y(0) = 0, y(1) = 1. \tag{5}$$

Stel dat de oplossing gegeven is in de roosterpunten $x_j = jh$ voor $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ met $h = \frac{1}{3}$: $y_0 = 0$, $y_1 = 0.4444$, $y_2 = 0.7778$ en $y_3 = 1$.

c Bepaal met behulp van lineaire interpolatie een benadering $p(0.4)$ voor $f(0.4)$. Hoe groot is de afbreekfout? (2 pt)

d We benaderen de afgeleide y' in x_2 met behulp van de achterwaartse differentie:

$$y'(x_2) \approx \frac{y_2 - y_1}{h}, \text{ met wederom } -y''(x) = 1 \text{ en } h = \frac{1}{3}. \tag{6}$$

Toon aan dat de absolute waarde van de afbreekfout gegeven wordt door $\dfrac{h}{2}$. (2 pt)

e Stel dat voor de numerieke oplossing w_i geldt ten opzichte van de exacte oplossing y_i:

$$|y_i - w_i| < 0.01. \tag{7}$$

Hoe groot kan de extra fout maximaal zijn ten gevolge van deze onnauwkeurigheid als we de achterwaartse differentie (6) uitvoeren met de numerieke gegevens in plaats van met de exacte gegevens. (1 pt)