TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
vrijdag 28 augustus 2009, 14:00-17:00

1. De modified Euler methode voor de integratie van beginwaarde probleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, is gegeven door

$$\begin{cases} w^*_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n) \\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{h}{2}\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w^*_{n+1})\right), \end{cases} \tag{1}$$

waarin h de tijdstap en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

(a) Toon aan dat de locale afbreekfout van de modified Euler methode van de orde $O(h^2)$ is. (U mag hier niet de testvergelijking gebruiken.) (3pt.)

Gegeven het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + y = \sin t, \\ y(0) = 1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 2. \end{cases} \tag{2}$$

(b) Laat zien dat bovenstaand beginwaarde probleem geschreven kan worden als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Geef ook de beginvoorwaarden voor $x_1(0)$ en $x_2(0)$. (1pt.)

(c) Bereken één stap met de modified Euler methode, waarbij $h = 0.1$ en $t_0 = 0$ met de gegeven beginvoorwaarden. (2pt.)

(d) Leid de versterkingsfactor voor de modified Euler methode af. (2pt.)

(e) Bepaal voor welke stapgrootte $h > 0$ de modified Euler methode toegepast op beginwaarde probleem (2), stabiel is. (2pt.)

[0] **voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. We beschouwen tweede orde Lagrange interpolatie: $f(x) = p(x) + r(x)f'''(\xi)$. De formule voor p is hieronder gedeeltelijk gegeven:

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \text{ met} L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}.$$

(a) Geef de formules voor $L_1(x)$ en $L_2(x)$. (1 pt.)

(b) We hebben de volgende tabel:

x	0	0.1	0.4
$ln(1+x)$	0	0.0953	0.3365

Geef een benadering van $ln(1.2)$ met bovenstaande tabelwaarden en tweede orde Lagrange interpolatie. (1 pt.)

(c) Stel dat $f(0.4)$ een afrondfout bevat en $|\hat{f}(0.4) - f(0.4)| < \epsilon$. Laat zien dat $|\hat{p}(x) - p(x)| < \epsilon$ voor alle $x \in [0, 0.4]$. (1 pt.)

We nemen nu $x_0 = 0$, $x_1 = h$ en $x_2 = 2h$ en gaan een benadering bepalen voor $f'(0)$.

(d) Leid met behulp van Taylor de afbreekfout af van de voorwaartse differentie: $\frac{f(h)-f(0)}{h}$. (1 pt.)

(e) Geef een formule om $f'(0)$ te benaderen met behulp van $f(0)$, $f(h)$ en $f(2h)$ zodat de afbreekfout $O(h^2)$ is. (3 pt.)

(f) Bepaal met beide methoden een benadering voor $f'(0)$ voor de functie $f(x) = cos(x) + x$. Gebruik hiervoor de waarden uit de tabel:

x	0	0.1	0.2
$cos(x) + x$	1	1.0950	1.1801

Bepaal het verschil met het exacte antwoord. Aan welke methode geeft u de voorkeur? (2 pt.)

(g) Geef voor de voorwaartse differentie een numerieke schatting van de afbreekfout. Als we aannemen dat $|\hat{f}(0.1) - f(0.1)| < 0.5 \times 10^{-4}$, hoe groot is dan de afrondfout in de voorwaartse differentie? Is het zinvol om de stapgrootte h te verkleinen (+ motivatie)? (1 pt.)