TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
dinsdag 29 januari 2008, 9:00-12:00

1. In deze opgave gaan we de tweede orde differentiaalvergelijking

$$y'' + 1000.5y' + 500y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 1 \tag{1}$$

oplossen, eerst met de Achterwaartse (Backward) Euler, vervolgens met de Voorwaartse Euler. We eisen daarbij dat de fout in de benadering van de afgeleide op het tijdstip $t = 3.6$ ten hoogste 0.0025 bedraagt.

Backward Euler, BE, wordt voor de differentiaalvergelijking $y' = f(t, y)$ gegeven door

$$w_{n+1} = w_n + hf(t_{n+1}, w_{n+1}).$$

a) Laat zien dat de versterkingsfactor van BE gelijk is aan

$$Q(h\lambda) = \frac{1}{1 - h\lambda}.$$

b) Toon aan dat als het reële deel van λ negatief is, dat dan BE stabiel is voor elke h.

c) Laat, voor de testvergelijking, zien dat de locale afbreekfout van BE $O(h)$ is. Aanwijzing: gebruik $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ en $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$.

d) Zet vergelijking (1) om in een stelsel eerste orde differentiaal vergelijkingen van het type $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ en Bepaal de eigenwaarden van de matrix A.

e) We berekenen numerieke oplossingen van (1) op het tijdstip $t = 3.6$ met behulp van BE voor de stapgrootten $h = 0.12$, 0.06 en 0.03. De resultaten voor de tweede component staan in onderstaande tabel. Schat de fout voor $h = 0.03$ en ga na of deze binnen de toegestane waarde van 0.0025 blijft.

h	$w(3.6, h)$
0.03	-0.167694
0.06	-0.169903
0.12	-0.174284

[0]**voor vervolg z.o.z**

f) We gaan nu (1) met Euler Voorwaarts oplossen. Bepaal (met het oog op stabiliteit) de maximale stapgrootte die bij deze methode voor (1) gebruikt kan worden.

g) Een berekening met Euler Voorwaarts met $h = 0.0015$ (net onder de onder (f) berekende stabiliteitsgrens) geeft -0.165353 als oplossing voor de tweede component op $t = 3.6$. De fout in deze oplossing is 0.000112. Welke methode acht U het meest geschikt om (1) op te lossen (+ motivatie)?

2. We beschouwen de functie $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}$.

(a) Definieer de vaste punt iteratie met behulp van de functie $g(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2$. Toon aan dat een vast punt van g gelijk is aan een nulpunt van f. Start met $p_0 = \frac{1}{2}$ en bereken p_1, p_2 en p_3.

(b) Toon aan dat de vaste punt iteratie convergeert voor alle $p_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$.

(c) Is deze methode convergent in de buurt van het tweede nulpunt $p = -1$ (+ motivatie)?

(d) Geef een afleiding van de Newton-Raphson formule

$$p_{i+1} = p_i - \frac{f(p_i)}{f'(p_i)}.$$

(e) Start met $p_0 = \frac{1}{2}$ en bereken p_1 met Newton-Raphson.

(f) Er is gegeven dat $\hat{f}$ meetfouten bevat terwijl de afgeleide foutvrij is ($\hat{f}' = f'$). Neem aan dat

$$|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon \text{ voor } x \in [\frac{1}{2}, 1].$$

Geef een bovengrens voor $|\hat{p}_{i+1} - p_{i+1}|$ als $\hat{p}_i = p_i$ en $p_i \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html