

**TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
vrijdag 29 augustus 2008, 14:00-17:00**

1. In deze opgave maken we gebruik van de trapeziummethode voor de integratie van het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$ met $y(t_0) = y_0$:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2} (f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1})) \quad (1)$$

- (a) Laat zien dat de versterkingsfactor van de trapeziummethode gegeven wordt door

$$Q(h\lambda) = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}}.$$

- (b) Geef de orde (+ bewijs) van de lokale afbreekfout van de trapeziummethode voor de testvergelijking (hint de volgende reeksen kunnen gebruikt worden: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ en $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$).

- (c) Doe één stap met de trapeziummethode voor het volgende beginwaardeprobleem

$$y' = -2y + e^t, \text{ met } y(0) = 2,$$

en stapgrootte $h = 1$.

- (d) We beschouwen het beginwaarde probleem:

$$y'' = -y' - \frac{1}{2}y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Schrijf deze tweede orde differentiaalvergelijking als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Toon aan dat de eigenwaarden van \mathbf{A} gegeven worden door

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ en } \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

- (e) Onderzoek de stabiliteit van de trapeziummethode toegepast op het stelsel gegeven in (d).

2. We willen de integraal $\int_a^b f(x)dx$ gaan benaderen met een numerieke methode.
- (a) Benader de integraal voor $f(x) = x^3$, $a = 0$ en $b = 1$ met de gerepeteerde Trapeziumregel met $h = \frac{1}{2}$ en bepaal het verschil met het echte antwoord.
 - (b) De gerepeteerde Trapeziumregel wordt toegepast op de met meetfouten belaste functie \hat{f} waarbij $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon$ voor $x \in [a, b]$. Geef een bovengrens voor de absolute fout in de benadering ten gevolge van de meetfouten.
 - (c) We gaan nu een nieuwe integratiemethode afleiden. Geef een uitdrukking voor het Taylorpolynoom $P_1(x)$ van de eerste orde rond steunpunt b . Geef de formule voor de afbreekfout: $f(x) - P_1(x)$.
 - (d) Laat met behulp van het antwoord uit 2c zien dat de integratieregels gebaseerd op $P_1(x)$ voor $\int_a^b f(x)dx$ gegeven wordt door

$$(b - a)f(b) - \frac{1}{2}(a - b)^2 f'(b)$$

en geef een bovengrens voor de bijbehorende afbreekfout.

- (e) Geef voor de nieuwe integratiemethode de gerepeteerde methode. Benader de integraal zoals gegeven in 2a met deze methode met $h = \frac{1}{2}$ en bepaal het verschil met het echte antwoord.
- (f) Aan welke methode geeft u de voorkeur: de methode uit 2e of de Trapeziumregel (+ motivatie). Er mag gebruikt worden dat de afbreekfout van de gerepeteerde Trapeziumregel begrensd wordt door: $\frac{(b-a)h^2}{12} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
<http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html>