TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
dinsdag 1 april 2008, 14:00-17:00

1. De Modified Euler methode wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} \text{predictor:} \quad \overline{w}_{n+1} &= w_n + hf(t_n, w_n), \quad (1) \\ \text{corrector:} \quad w_{n+1} &= w_n + \frac{h}{2}[f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, \overline{w}_{n+1})]. \quad (2) \end{aligned}$$

   (a) Laat zien, dat de lokale afbreekfout van de Modified Euler methode voor een algemene differentiaalvergelijking $O(h^2)$ is. (3 pt)

   (b) Leid de versterkingsfactor af van deze methode. (1.5 pt)

   (c) De vergelijking van de gedempte mathematische slinger wordt gegeven door: $\Phi'' + \Phi' + \frac{1}{2}\Phi = 0$, en $\Phi(0) = 1, \Phi'(0) = 0$. Schrijf de tweede orde differentiaalvergelijking als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

   Laat zien dat A gegeven wordt door: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$. (1 pt)

   (d) Is de Modified Euler methode toegepast op (3) stabiel voor de stapgrootte $h = 1$ (+ motivatie)? (1.5 pt)

   (e) De tweede orde differentiaalvergelijking $\Phi'' + \sin\Phi = 0$, kunnen we ook schrijven als het niet lineaire stelsel:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin y_1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

   Bepaal de Jacobiaan van dit niet lineaire stelsel voor $\Phi(0) = \frac{\pi}{4}$ en $\Phi'(0) = 0$. (1.5 pt)

   (f) Is de Modified Euler methode toegepast op (4) stabiel als $h = 1$ en $-\frac{\pi}{2} \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}$ (+ motivatie)? (1.5 pt)

2. In de eerste drie onderdelen van deze opgave maken we gebruik van een hypothetische computer die met floating point (decimale) getallen kan rekenen. Deze computer heeft de volgende specificaties:

[0] **voor vervolg z.o.z**

(a) Ieder reëel getal wordt voorgesteld als floating point number met vier cijfers achter de komma;

(b) De floating point weergave vindt plaats door *afronding*.

Dus als voorbeeld: $fl(5/7) = fl(0.714285714\ldots) = 0.7143 \cdot 10^0$. In de opgave beschouwen we volgende twee gegeven getallen $x = 2/3 = 0.666666666\ldots$ en $y = 1999/3000 = 0.666333333\ldots$.

[a] Bereken $x + y$, $x - y$, $fl(fl(x) + fl(y))$ en $fl(fl(x) - fl(y))$, met de hierboven gegeven waarden voor x en y, als exacte uitkomsten en computerweergaven van deze uitkomsten. (1.5 pt)

[b] Geef de relatieve fout die optreedt als gevolg van de afronding in de berekeningen door onze computer voor $x + y$ en $x - y$. (1 pt)

[c] Geef een motivatie waarom de relatieve fout in het algemeen als $x \approx y$ voor $x - y$ dramatisch hoger ligt dan voor $x + y$ onder aanname dat $x, y > 0$. (1 pt)

In het tweede deel van de opgave, onderdelen [d-g] beschouwen we een hardrijder die op een snelweg rijdt waar een maximum toegelaten snelheid 100 km/uur geldt. Een flitsapparaat registreert de volgende posities op opvolgende tijden van de hardrijder:

t (seconde)	x (meter)
0	$4 \pm \varepsilon$
0.25	$11 \pm \varepsilon$
0.5	$20 \pm \varepsilon$

Hierin is ε een meetfout die verschillende oorzaken kan hebben.

[d] Benader met een centrale differentie, $Q(h)$, de gemeten snelheid onder verwaarlozing van de meetfout ε. (1.5 pt)

[e] Toon aan dat de afbreekfout, $|Q(h) - f'(x)|$, in de centrale differentie van de orde $O(h^2)$ is. (2 pt)

[f] Geef de meetfout op de benadering in onderdeel [e]. (2 pt)

[g] Op de bekeuring treft men een correctie van de gemeten snelheid aan. Dat is precies de in onderdeel [f] berekende maximale invloed van de meetfout op de benadering van de snelheid. Op de bekeuring staat een correctie van 3 km/uur. Bepaal nu de meetfout ε die hierbij hoort. (1 pt)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html