TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
dinsdag 30 januari 2007, 9:00-12:00

1. In deze opgave maken we gebruik van de trapeziummethode voor de integratie van het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$ met $y(t_0) = y_0$:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1})\right) \tag{1}$$

   (a) Laat zien dat de versterkingsfactor van de trapeziummethode gegeven wordt door
   $$Q(h\lambda) = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}}.$$

   (b) Geef de orde (+ bewijs) van de lokale afbreekfout van de trapeziummethode voor de testvergelijking (hint de volgende reeksen kunnen gebruikt worden: $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ en $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$).

   (c) Doe één stap met de trapeziummethode voor het volgende beginwaardeprobleem
   $$y' = -4y + 2t, \text{ met } y(0) = 2,$$
   en stapgrootte $h = 1$.

   (d) De mathematische slinger met demping kan beschreven worden door:
   $$y'' + 2y' + 2y = 0.$$
   Schrijf deze tweede orde differentiaalvergelijking als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Toon aan dat de eigenwaarden van $\mathbf{A}$ gegeven worden door
   $$\lambda_1 = -1 + i \text{ en } \lambda_2 = -1 - i.$$

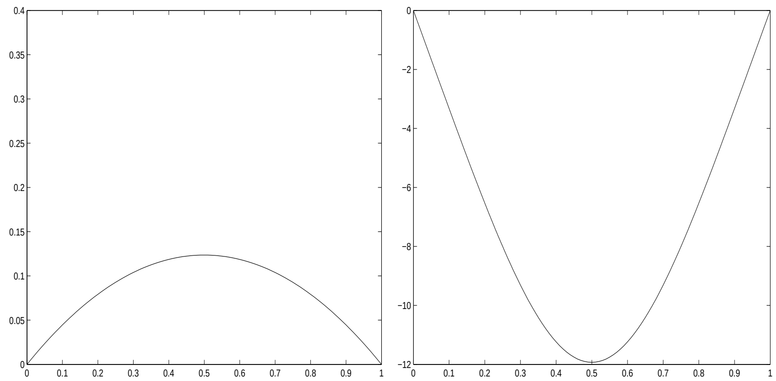
   (e) Onderzoek de stabiliteit van de trapeziummethode toegepast op het stelsel gegeven in (d).

[0]**voor vervolg z.o.z**

2. Gegeven is het volgende niet-lineaire Dirichlet randwaarde probleem

$$-y'' + y^2 = 1, \quad y(0) = y(1) = 0. \tag{2}$$

Een kwalitatieve analyse van (2) heeft het volgende aangetoond:
(**A**) Er zijn twee oplossingen, een die positief is en een tweede die negatief is.
(**B**) Beide oplossingen zijn symmetrisch ten opzichte van de lijn $x = \frac{1}{2}$.
(**C**) De positieve oplossing $y(x)$ ligt geheel *beneden* de kwadratische functie $\frac{1}{2}x(1-x)$.
Uit deze eigenschap kunnen de volgende bovengrenzen voor de afgeleiden worden afgeleid: $0 < y < \frac{1}{8}$, $|y'| < \frac{1}{2}$, $|y'''| < \frac{1}{8}$, and $|y''''| < \frac{3}{4}$.



Figuur 1: Positieve (links) en negatieve (rechts) oplossing van (2)

Wij willen het maximum $y(\frac{1}{2})$ van de *positieve* oplossing benaderen.

a) Discretizeer (2), met behulp van $O(h^2)$- nauwkeurige centrale differenties. Kies stapgrootte $h = \frac{1}{3}$ en toon aan dat de twee onbekenden w_1 and w_2 moeten voldoen aan het niet-lineaire stelsel:

$$2w_1 - w_2 + \frac{1}{9}w_1^2 - \frac{1}{9} = 0 \tag{3}$$

$$-w_1 + 2w_2 + \frac{1}{9}w_2^2 - \frac{1}{9} = 0 \tag{4}$$

b) Net als de exacte oplossing heeft het stelsel (3), (4) symmetrische oplossingen, dat wil zeggen, oplossingen met $w_1 = w_2 = w$. Toon aan dat w voldoet aan:

$$f(w) = w + \frac{1}{9}w^2 - \frac{1}{9} = 0, \tag{5}$$

en bereken de w die bij de positieve oplossing hoort.

c) Benader het maximum $y(\frac{1}{2})$, door toepassing van Lagrange interpolatie op $w_0(= 0)$ en de berekende waarden $w_1(= w)$ en $w_2(= w)$. Noteer het resltaat als w_{max}. (Hint: het kwadratische Lagrange polynoom wordt gegeven door: $w_0L_0(x) + w_1L_1(x) + w_2L_2(x)$, waarbij: $L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$.)

We gaan nu de fout $y(\frac{1}{2}) - w_{max}$ schatten. De twee bronnen van fouten zijn: (i) de data fout ten gevolge van fouten in w_1 and w_2, veroorzaakt door de discretisatie, en (ii) de interpolatie fout.

d) De (lokale) afbreekfout $(TE)_i$ in een punt i is gedefinieerd als

$$y_i'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + (TE)_i.$$

Toon aan dat $(TE)_i$ wordt gegeven door $ch^2 y''''(\eta_i)$ en bepaal c.

e) Toon aan dat de exacte oplossingen y_1 and y_2 moeten voldoen aan

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 + \frac{1}{9}y_1^2 - \frac{1}{9} &= -\frac{1}{12}(\frac{1}{3})^4 y''''(\eta_1), \\ -y_1 + 2y_2 + \frac{1}{9}y_2^2 - \frac{1}{9} &= -\frac{1}{12}(\frac{1}{3})^4 y''''(\eta_2). \end{aligned}$$

Vanwege de symmetrie van de exacte oplossing moeten de twee vergelijkingen reduceren tot dezelfde vergelijking voor de gemeenschappelijke waarde $y_1 = y_2 = y$. Laat zien dat y voldoet aan

$$f(y) = y + \frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{9} = \epsilon = -\frac{1}{12}(\frac{1}{3})^4 y''''(\eta), \quad 0 < \eta < 1. \tag{6}$$

f) De vergelijking (6) voor y is met ϵ verstoord ten opzichte van vergelijking (5) voor w. Laat zien dat $|y - w| < \epsilon$ (Hint: trek (6) van (5) af en lineariseer het linker lid.) Toon vervolgens aan dat moet gelden $|y - w| < 0.0008$; maak hierbij gebruik van de bovengrens voor y'''', zoals bij eigenschap (**C**) gegeven.

g) Voor de interpolatie in c) zijn de numerieke waarden $w_1 = w_2 = w$ gebruikt, in plaats van de exacte waarden $y_1 = y_2 = y$. Laten we de interpolatie met de exacte waarden aanduiden door $\overline{w}_{max}$.
Geef een bovengrens voor de absolute waarde van de data fout $|\overline{w}_{max} - w_{\mathrm{max}}|$; maak gebruik van de bovengrens voor $|y - w|$ afgeleid onder f).

h) Naast de data fout wordt er ook een interpolatie fout gemaakt. deze wordt gegeven door de uitdrukking $\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!}y'''(\xi)$. Geef een bovengrens voor de interpolatie fout, gebruik makend van de bovengrens voor y''' zoals gegeven onder eigenschap (**C**)

i) Gegeven is dat $y(\frac{1}{2}) = 0.123598625$. Controleer of het verschil met onze 'ruwe' benadering gedaan in c) kleiner is dan de bovengrens voor de totale fout die volgt uit de schattingen uitgevoerd onder g) and h).

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html