TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
woensdag 29 augustus 2007, 14:00-17:00

1. a De vierde orde Runge-Kutta method (RK_4) voor de differentiaalvergelijking $y' = f(t, y)$ wordt gegeven door de volgende formules:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, w_n) \\ k_2 &= hf(t_n + \tfrac{1}{2}h, w_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(t_n + \tfrac{1}{2}h, w_n + \tfrac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(t_n + h, w_n + k_3) \end{aligned}$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Bepaal de versterkingsfactor $Q(h\lambda)$ van RK_4 door de methode toe te passen op de homogene testvergelijking $y' = \lambda y$.

b Gebruik het feit dat $y(t_{n+1}) = e^{h\lambda}y(t_n)$ geldt voor de exacte oplossing van $y' = \lambda y$ om te laten zien dat RK_4 toegepast op de homogene testvergelijking een lokale afbreekfout heeft van $O(h^4)$. (Hint: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...$)

In de volgende onderdelen mag je aannemen dat dit resultaat ook geldt voor stelsels, zodat de globale fout van RK_4 toegepast op (1) gelijk is aan $O(h^4)$.

We beschouwen het volgende tweede orde beginwaarde problem:

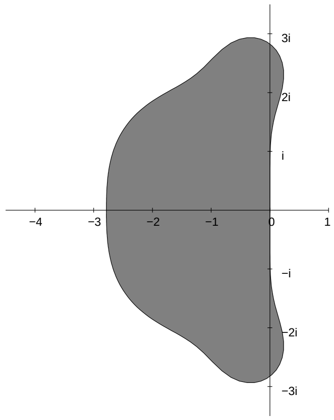
$$y'' + py' + qy = \cos t, \quad y(0) = y_0, \; y'(0) = y'_0. \tag{1}$$

c Schrijf (1) als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen van het type $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$. Geef $\mathbf{A}$ en $\mathbf{g}$ en bepaal de eigenwaarden van $\mathbf{A}$, voor willekeurige p en q.

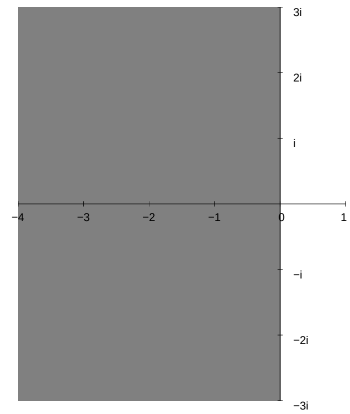
d We nemen nu het geval p=1000 en q=250001. Geef een benadering van de stabiliteitsvoorwaarde voor dit geval. Hint: gebruik onderstaand figuur van het stabiliteitsgebied van RK_4.

e Stel dat je een keuze moet maken tussen de Trapezium regel en RK_4 om het geval gegeven in (d) op te lossen. Motiveer je keuze zo goed mogelijk. Hierbij moeten aan de orde komen: de stabiliteitsvoorwaarde en de orde van grootte van de globale fout.

[0]**voor vervolg z.o.z**



Figuur 1: Stabiliteitsgebied voor RK_4



Figuur 2: Stabiliteitsgebied voor de Trapezium regel

2. We beschouwen het volgende randwaardeprobleem

$$-x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = x^2, \tag{2}$$

met randvoorwaarden $y(0) = 0$ en $y(1) = 1$.

a Laat h de stapgrootte zijn. Geef een discretisatie met een locale afbreekfout fout van $O(h^2)$ (+ bewijs) voor n inwendige steunpunten.

b Geef het stelsel vergelijkingen wanneer gebruik gemaakt wordt van twee inwendige steunpunten (dus $n = 2$). Verwerk de randvoorwaarden.

We beschouwen nu de volgende oplossing $y(0) = 0$, $y(1/3) = 1/9$, $y(2/3) = 4/9$ en $y(1) = 1$. We zijn geinteresseerd in de integraal $\int_0^1 y(x)dx$. Deze integraal benaderen we met behulp van de Trapeziumregel.

c (i) Geef de Trapeziumregel en de samengestelde Trapeziumregel.

(ii) Benader de integraal $\int_0^1 y(x)dx$ met de samengestelde Trapeziumregel en de gegeven integratiepunten.

d Tenslotte zijn we geïnteresseerd in de waarde van x waarvoor $y(x) = 1/2$.

(i) Geef de formule voor het lineaire interpolatiepolynoom $P(x)$ met steunpunten $y(2/3) = 4/9$ en $y(1) = 1$.

(ii) Bepaal het punt $\tilde{x}$ waar $P(\tilde{x}) = 1/2$ met behulp van steunpunten in onderdeel (i) van deze vraag. (Dit is inverse lineaire interpolatie ofwel Regula-Falsi.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html