TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
dinsdag 3 april 2007, 14:00-17:00

1. We beschouwen de volgende predictor-corrector methode voor de integratie van het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} w^*_{n+1} &= w_n + hf(t_n, w_n), \\ w_{n+1} &= w_n + h\left(\theta f(t_{n+1}, w^*_{n+1}) + (1-\theta) f(t_n, w_n)\right), \end{aligned} \tag{1}$$

waarin h de tijdstap, θ een reëel getal ($0 \leq \theta \leq 1$) en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

   (a) Toon aan dat de locale afbreekfout van de bovenstaande methode voor $0 \leq \theta \leq 1$ van de orde $O(h)$ en voor $\theta = \frac{1}{2}$ $O(h^2)$ is (*N.B. Dit moet afgeleid worden voor de algemene differentiaalvergelijking* $y' = f(t, y)$).

   (b) Leid af dat de versterkingsfactor van deze methode gegeven wordt door

$$Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \theta(h\lambda)^2.$$

   (c) Gegeven het beginwaarde probleem

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 - y_2, \\ y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2. \end{cases} \tag{2}$$

   Voer één stap uit voor bovenstaand stelsel met behulp van de bovenstaande methode met $h = 1$ en $\theta = \frac{1}{2}$.

   (d) Laat $0 \leq \theta \leq 1$, ga na voor welke θ de methode in vergelijking (1) met stapgrootte $h = 1$ stabiel is bij toepassen op het bovenstaande stelsel in onderdeel [c]. Geef een duidelijke motivatie.

   (e) We gebruiken nu de achterwaartse methode van Euler:

$$w_{n+1} = w_n + hf(t_{n+1}, w_{n+1}). \tag{3}$$

   Bereken voor deze achterwaartse methode van Euler de maximale h voor numerieke stabiliteit als deze methode toegepast wordt op stelsel (2).

[0]**voor vervolg z.o.z**

2. (a) We zoeken een differentie formule voor de tweede afgeleide van f in het punt $x = 0$ van de vorm:

$$Q(h) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(h) + \alpha_2 f(2h),$$

zodat

$$f''(0) - Q(h) = O(h).$$

Laat zien dat de coefficienten α_0, α_1 en α_2 moeten voldoen aan het volgende stelsel:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_0 & + & \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0\ , \\ & & h\alpha_1 & + & 2h\alpha_2 & = & 0\ , \\ & & \frac{h^2}{2}\alpha_1 & + & 2h^2\alpha_2 & = & 1\ . \end{array}$$

(b) De oplossing van dit stelsel wordt gegeven door $\alpha_0 = \frac{1}{h^2}$, $\alpha_1 = -\frac{2}{h^2}$ en $\alpha_2 = \frac{1}{h^2}$. Geef voor deze waarden een uitdrukking voor de afbreekfout $f''(0) - Q(h)$.

(c) Gebruik de getallen gegeven in de volgende Tabel 1. Geef met behulp van de

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{4}$	0.2474
$\frac{1}{2}$	0.4794
$\frac{3}{4}$	0.6816
1	0.8415

Tabel 1: De gebruikte waarden

Richardson methode een schatting van de fout: $f''(0) - Q(\frac{1}{4})$.

(d) Gegeven is dat de tabelwaarden een maximale afrondfout hebben van ϵ: $|f(x) - \hat{f}(x)| \leq \epsilon$.
- Geef de waarde van ϵ.
- Laat zien, dat voor de afrondfout in de benadering geldt:

$$|Q(h) - \hat{Q}(h)| \leq \frac{C_1 \epsilon}{h^2}$$

en geef C_1.

(e) Als gegeven is dat $f''(0) - Q(h) = \frac{1}{3}h$, geef dan de optimale waarde van h zodat de totale fout $|f''(0) - \hat{Q}(h)|$ minimaal is.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html