TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
dinsdag 31 januari 2006, 14:00-17:00

1. Voor het numeriek integreren van de eerste orde differentiaal vergelijking $y' = f(t, y)$ beschouwen we de volgende klasse van methoden:

$$\begin{aligned} u^\star &= u_n + \alpha h f(t_n, u_n), \qquad (1) \\ u_{n+1} &= u_n + \beta h f(t_n + \alpha h, u^\star), \end{aligned}$$

waarbij α en β op een geschikte manier gekozen moeten worden.

   a) Toon aan dat β gelijk aan 1 gekozen moet worden om een lokale afbreekfout van tenminste $O(h)$ te verkrijgen. Voor welke α is de lokale afbreekfout van $O(h^2)$?
   b) Bepaal de versterkingsfactor voor $\beta = 1$.
   c) We gaan (1) met $\beta = 1$ gebruiken om het systeem

   $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

   te integreren. Geef een grens voor de stapgrootte zodat de methode stabiel is. Voor welke waarden van α is een stabiele integratie onmogelijk?
   d) Gegeven de tweede orde differentiaal vergelijking $y'' + 6y' + 36y = \sin t$. Schrijf deze vergelijking als een stelsel eerste orde differentiaal vergelijkingen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ en bepaal de eigenwaarden van A.
   e) We willen het stelsel in d) integreren, gebruikmakend van (1) met β=1 en $\alpha = 0$. Bepaal een redelijke schatting voor de stabiliteitsgrens (ten minste 50 % nauwkeurig).
   Hint: gebruik het stabiliteitsgebied van deze methode. Het stabiliteitsgebied is een cirkel in het $h\lambda$-vlak met centrum (-1,0) en straal 1; let op je kan de stabiliteitsgrens beter onderschatten, dan overschatten.

2. We willen de integraal $\int_a^b f(x)dx$ gaan benaderen met een numerieke methode.

   (a) Benader de integraal voor $f(x) = 1 - x^3$, $a = 0$ en $b = 1$ met de gerepeteerde Trapeziumregel met $h = \frac{1}{2}$ en bepaal het verschil met het echte antwoord.

[0] **voor vervolg z.o.z**

(b) De gerepeteerde Trapeziumregel wordt toegepast op de met meetfouten belaste functie $\hat{f}$ waarbij $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon$ voor $x \in [a, b]$. Geef een bovengrens voor de absolute fout in de benadering ten gevolge van de meetfouten.

(c) We gaan nu een nieuwe integratiemethode afleiden. Geef een uitdrukking voor het Taylorpolynoom $P_1(x)$ van de eerste orde rond steunpunt a. Geef de formule voor de afbreekfout: $f(x) - P_1(x)$.

(d) Laat met behulp van het antwoord uit 2c zien dat de integratieregel gebaseerd op $P_1(x)$ voor $\int\limits_a^b f(x)dx$ gegeven wordt door

$$(b-a)f(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f'(a)$$

en geef een bovengrens voor de bijbehorende afbreekfout.

(e) Geef voor de nieuwe integratiemethode de gerepeteerde methode. Benader de integraal zoals gegeven in 2a met deze methode met $h = \frac{1}{2}$ en bepaal het verschil met het echte antwoord.

(f) Aan welke methode geeft u de voorkeur: de methode uit 2e of de Trapeziumregel (+ motivatie). Er mag gebruikt worden dat de afbreekfout van de gerepeteerde Trapeziumregel begrensd wordt door: $\frac{(b-a)h^2}{12} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html