TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
woensdag 30 augustus 2006, 9:00-12:00

1. We beschouwen de volgende methode voor de integratie van het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$

$$\begin{cases} w^*_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n) \\ \\ w_{n+1} = w_n + h\left(a_1 f(t_n, w_n) + a_2 f(t_{n+1}, w^*_{n+1})\right) \end{cases} \tag{1}$$

a Toon aan dat de locale afbreekfout van de bovenstaande methode van de orde $O(h)$ is als $a_1 + a_2 = 1$. Voor welke waarde van a_1 en a_2 is de locale afbreekfout van de orde $O(h^2)$?

b Laat zien dat de versterkingsfactor voor algemene a_1 en a_2 gegeven wordt door

$$Q(h\lambda) = 1 + (a_1 + a_2)h\lambda + a_2(h\lambda)^2. \tag{2}$$

c Beschouw $\lambda < 0$ en $(a_1 + a_2)^2 - 8a_2 < 0$, leid de stabiliteitsvoorwaarde af waar h aan moet voldoen.

d Beschouw het volgende stelsel

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 y_2, \\ y_2' = y_1 y_2 - y_2, \end{cases} \tag{3}$$

Laat zien dat de Jacobiaan van het rechterlid (die gebruikt wordt voor linearisatie van het stelsel) voor beginvoorwaarde $y_1(0) = y_2(0) = 1$ gegeven wordt door

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

e Beschouw nu de numerieke methode in vergelijking (1) voor het geval dat $a_1 = a_2 = 1/2$ toegepast op stelsel (3). Leid voor h de stabiliteitsvoorwaarde af rond de beginvoorwaarde $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

[0]**voor vervolg z.o.z**

2. We beschouwen de functie $f(x) = x^2 + 6 - \frac{25}{8x}$.

   (a) Definieer de vaste punt iteratie met behulp van de functie $g(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{25}{48}$. Toon aan dat een vast punt van g gelijk is aan een nulpunt van f. Start met $p_0 = 1$ en bereken p_1, p_2 en p_3.

   (b) Schets de vaste punt iteratie in een figuur gebruikmakend van de iteraties berekend in (a).

   (c) Toon aan dat de vaste punt iteratie convergeert voor alle $p_0 \in [0, 1]$.

   (d) Geef een afleiding van de Newton-Raphson formule

$$p_{i+1} = p_i - \frac{f(p_i)}{f'(p_i)}.$$

   (e) Start met $p_0 = 1$ en bereken p_1 met Newton-Raphson.

   (f) Toon aan dat de Newton-Raphson methode kwadratisch convergeert in de buurt van het nulpunt $p = 0.5$.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html