TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
dinsdag 4 april 2006, 9:00-12:00

1. Gegeven is de numerieke integratiemethode:
$$w_{n+1} = w_n + h\{\frac{3}{2}f(t_n, w_n) - \frac{1}{2}f(t_{n-1}, w_{n-1})\} \tag{1}$$
voor integratie van de gewone differentiaalvergelijking $y' = f(t, y)$ met beginvoorwaarde $y(t_0) = y_0$.
   (a) Toon aan dat de locale afbreekfout $O(h^2)$ is. Hierbij mag worden aangenomen, dat de exacte oplossing in zowel t_{n-1} als t_n bekend is.
   (b) Pas methode (1) toe op de testvergelijking. Voor de versterkingsfactor $Q(h\lambda)$ geldt $w_{n+1} = Q(h\lambda)w_n$ voor alle waarden van n. Leid hieruit af, dat moet gelden:
$$\{Q(h\lambda)\}^2 - (1 + \tfrac{3}{2}h\lambda)Q(h\lambda) + \tfrac{1}{2}h\lambda = 0 \tag{2}$$
   (c) Toon aan dat de methode stabiel is voor $h \leq \frac{1}{-\lambda}$ als λ een reël en negatief getal is.
   (d) Gegeven is het volgende stelsel
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \text{ met } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Geef een bovengrens voor h zodat methode (1) stabiel is.
   (e) Men integreert dit stelsel numeriek als volgt: in de eerste stap past men de Euler Voorwaarts methode toe en in alle volgende stappen methode (1). Neem $h = \frac{1}{2}$ en voer de eerste twee stappen van dit proces uit om de oplossing op $t = 1$ te benaderen.

2. Gegeven het volgende niet-lineaire randwaardeprobleem:
$$\begin{cases} -y'' + y^2 = \frac{4}{x}, \text{ voor } x \in (0,1) \\ y(0) = 0, y(1) = 1. \end{cases} \tag{3}$$
We benaderen de oplossing van dit probleem met behulp van eindige differenties. De roosterpunten worden gegeven door $x_j = jh$, $j \in \{0, \ldots, n\}$ met $h = \dfrac{1}{n+1}$.

[0]**voor vervolg z.o.z**

a Geef een discretisatie (+bewijs) van $-y'' + y^2 = \frac{4}{x}$ waarbij de locale afbreekfout van de discretisatie van de tweede afgeleide van de orde $O(h^2)$ is.

b Geef voor $n = 3$ (3 inwendige gridpunten) het stelsel vergelijkingen waaraan de numerieke oplossing w_i moet voldoen. Verwerk hierin ook de randvoorwaarden.

We beschouwen het volgende stelsel niet-lineaire vergelijkingen voor w_1 en w_2

$$\begin{cases} 18w_1 - 9w_2 + w_1^2 = 9 \\ \\ -9w_1 + 18w_2 + w_2^2 = \frac{9}{2} \end{cases} \tag{4}$$

c Doe één stap met de Newton-Raphson methode voor stelsels niet-lineaire vergelijkingen voor bovenstaand stelsel met als beginschatting

$$\underline{p}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gegeven is de functie $f(x)$ met de volgende tabelwaarden:

x	$f(x)$
0	0
1/3	5
2/3	4

Deze tabel zou bijvoorbeeld de waarden van de numerieke oplossing van het hierboven beschreven niet-lineaire randwaarde probleem kunnen bevatten.

d
  i Benader $f(1/4)$ met behulp van lineaire Lagrange interpolatie. Maak hierbij gebruik van de getallen uit de bovenstaande tabel.

  ii Stel dat de functiewaarden in de bovenstaande tabel aan meetfouten onderhevig zijn, m.a.w. $\tilde{f}(x) = f(x) \pm \varepsilon$, waarbij $\tilde{f}(x)$ uit bovenstaande tabel komt en $f(x)$ de exacte functiewaarde voorstelt. Hoe erg kan deze meetfout maximaal doorwerken als men gebruik maakt van de lineaire interpolatie om de functiewaarde $f(1/4)$ te benaderen.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html