TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
dinsdag 1 februari 2005, 14:00-17:00

1. We beschouwen het volgende tweede orde beginwaarde problem:

$$y'' + py' + qy = \cos t, \quad y(0) = y_0, \; y'(0) = y_0'. \tag{1}$$

   (a) Schrijf (1) als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen van het type $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$. Geef $\mathbf{A}$ en $\mathbf{g}$ en bepaal de eigenwaarden van $\mathbf{A}$, voor willekeurige p en q.

   (b) De vierde orde Runge-Kutta method (RK_4) voor de differentiaalvergelijking $y' = f(t, y)$ wordt gegeven door de volgende formules:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, w_n) \\ k_2 &= hf(t_n + \tfrac{1}{2}h, w_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(t_n + \tfrac{1}{2}h, w_n + \tfrac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(t_n + h, w_n + k_3) \end{aligned}$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

   Bepaal de versterkingsfactor $Q(h\lambda)$ van RK_4 door de methode toe te passen op de homogene testvergelijking $y' = \lambda y$.

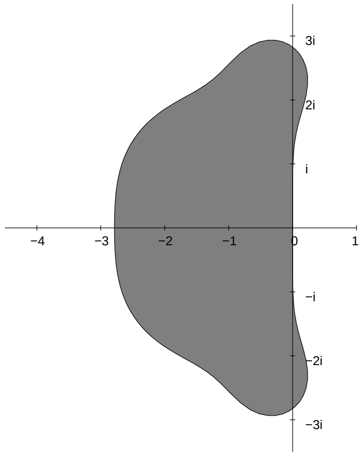
   (c) Gebruik het feit dat $y(t_{n+1}) = e^{h\lambda} y(t_n)$ geldt voor de exacte oplossing van $y' = \lambda y$ om te laten zien dat RK_4 toegepast op de homogene testvergelijking een lokale afbreekfout heeft van $\mathrm{O}(h^4)$.

   In de volgende opgaven mag je aannemen dat dit resultaat ook geldt voor stelsels, zodat de globale fout van RK_4 toegepast op (1) gelijk is aan $\mathrm{O}(h^4)$.

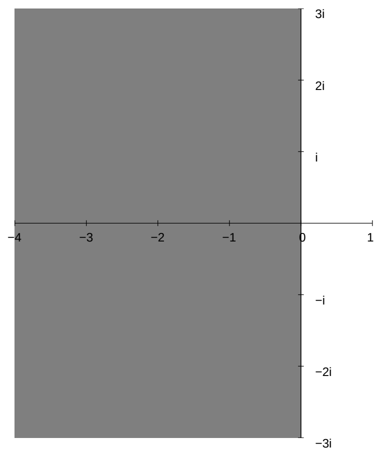
   (d) We nemen nu het geval p=2000 en q=1000009. Geef een benadering van de stabiliteitsvoorwaarde voor dit geval. Hint: gebruik onderstaand figuur van het stabiliteitsgebied van RK_4.

   (e) Stel dat je een keuze moet maken tussen de Crank-Nicolson methode en RK_4 om het geval gegeven in (d) op te lossen. Motiveer je keuze zo goed mogelijk. Hierbij moeten aan de orde komen: de stabiliteitsvoorwaarde en de orde van grootte van de globale fout.

[0] **voor vervolg z.o.z**



Figuur 1: Stabiliteitsgebied voor RK_4



Figuur 2: Stabiliteitsgebied voor Crank-Nicolson

(f) Zou je antwoord op vraag (e) hetzelfde zijn als het rechterlid van (1) vervangen zou worden door $\cos(1000t)$ (met dezelfde waarden van p en q als in vraag (d))? Motiveer!

2. We beschouwen de functie $f(x) = -x^3 + 6x - 2\frac{7}{8}$.

(a) Definieer de vaste punt iteratie met behulp van de functie $g(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{23}{48}$. Toon aan dat een vast punt van g gelijk is aan een wortel van f. Start met $p_0 = 1$ en bereken p_1, p_2 en p_3.

(b) Schets de vaste punt iteratie in een figuur gebruikmakend van de iteraties berekend in (a).

(c) Toon aan dat de vaste punt iteratie convergeert voor alle $p_0 \in [0, 1]$.

(d) Geef een afleiding van de Newton-Raphson formule

$$p_{i+1} = p_i - \frac{f(p_i)}{f'(p_i)}.$$

(e) Start met $p_0 = 1$ en bereken p_1 met Newton-Raphson.

(f) Toon aan dat in de omgeving van het vaste punt $p = 0.5$ de Newton-Raphson methode altijd sneller convergeert dan de vaste punt iteratie zoals gegeven in (a).

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html