TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

**TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)**
**woensdag 31 augustus 2005, 9:00-12:00**

1. Gegeven is de methode voor het oplossen van de differentiaalvergelijking $y' = f(t, y)$ en $y(0) = y_0$.

$$\begin{cases} w^*_{j+1} = w_j + hf(t_j, w_j) \\ w_{j+1} = w_j + (1-\beta)hf(t_j, w_j) + \beta hf(t_{j+1}, w^*_{j+1}) \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Toon aan, dat de locale afbreekfout $O(h^2)$ is als $\beta = \frac{1}{2}$ en anders $O(h)$.

   (b) Bepaal de versterkingsfactor $Q(h\lambda)$, van deze methode.

   (c) We gebruiken methode (1) voor het oplossen van het stelsel $\frac{d}{dt}\underline{x} = A\underline{x} + \underline{f}(t)$. De eigenwaarden van $A$ zijn $\lambda_1 = 2i$ en $\lambda_2 = -2i$. Laat zien dat dit stelsel alleen stabiel geintegreerd kan worden als $\beta > \frac{1}{2}$. Geef voor dit geval een stabiliteitscriterium.

   (d) Doe 1 stap met methode (1), met $\beta = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{2}$, toegepast op het stelsel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix}, \qquad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

2. (a) We zoeken een formule van de vorm:

$$Q(h) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(h) + \alpha_2 f(2h),$$

   zodat

$$f'(0) - Q(h) = O(h^2).$$

   Laat zien dat de coefficienten $\alpha_0$, $\alpha_1$ en $\alpha_2$ moeten voldoen aan het volgende stelsel:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_0 & + & \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0\,, \\ & & h\alpha_1 & + & 2h\alpha_2 & = & 1\,, \\ & & \frac{h^2}{2}\alpha_1 & + & 2h^2\alpha_2 & = & 0\,. \end{array}$$

   (b) De oplossing van dit stelsel wordt gegeven door $\alpha_0 = -\frac{3}{2h}$, $\alpha_1 = \frac{2}{h}$ en $\alpha_2 = -\frac{1}{2h}$. Geef voor deze waarden een uitdrukking voor de afbreekfout $f'(0) - Q(h)$.

   (c) Gebruik de getallen gegeven in de volgende Tabel 1. Geef met behulp van de Richardson methode een schatting van de fout: $f'(0) - Q(\frac{1}{4})$.

[0]**voor vervolg z.o.z**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\frac{1}{4}$ | 0.2474 |
| $\frac{1}{2}$ | 0.4794 |
| $\frac{3}{4}$ | 0.6816 |
| 1 | 0.8415 |

Tabel 1: De gebruikte waarden

(d) Gegeven is dat de tabelwaarden een maximale afrondfout hebben van $\epsilon$: $|f(x) - \hat{f}(x)| \leq \epsilon$. Laat zien, dat voor de afrondfout in de benadering geldt:

$$|Q(h) - \hat{Q}(h)| \leq \frac{C_1 \epsilon}{h}$$

en geef $C_1$ en $\epsilon$.

(e) Als gegeven is dat $f'(0) - Q(h) = \frac{1}{3}h^2$, geef dan de optimale waarde van $h$ zodat de totale fout $|f'(0) - \hat{Q}(h)|$ minimaal is.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html