TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
dinsdag 5 april 2005, 9:00-12:00

1. De vergelijking van de gedempte mathematische slinger wordt gegeven door: $\Phi'' + \Phi' + \frac{1}{2}\Phi = 0$, en $\Phi(0) = 1, \Phi'(0) = 0$.

   (a) Schrijf de tweede orde differentiaalvergelijking als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen:
   $$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$
   Laat zien dat A gegeven wordt door: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) De Modified Euler methode wordt gegeven door:
   $$\text{predictor:} \quad \overline{w}_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n), \tag{2}$$
   $$\text{corrector:} \quad w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2}[f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, \overline{w}_{n+1})]. \tag{3}$$
   Leid de versterkingsfactor af van deze methode.

   (c) Is de Modified Euler methode toegepast op (1) stabiel voor de stapgrootte $h = 1$ (+ motivatie)?

   (d) Een andere numerieke methode is de Trapeziumregel. De versterkingsfactor van deze methode is:
   $$Q(h\lambda) = \frac{1 + \frac{1}{2}h\lambda}{1 - \frac{1}{2}h\lambda}.$$
   Laat zien, dat de lokale afbreekfout van deze methode toegepast op de testvergelijking $y' = \lambda y$ gelijk is aan $O(h^2)$.
   (Hint: $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...$ en $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + ...$)

   (e) Voor welke h is de Trapeziumregel toegepast op (1) stabiel?

   (f) De tweede orde differentiaalvergelijking $\Phi'' + \sin\Phi = 0$, kunnen we ook schrijven als het niet lineaire stelsel:
   $$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin y_1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$
   Bepaal de Jacobiaan van dit niet lineaire stelsel voor $\Phi(0) = \frac{\pi}{4}$ en $\Phi'(0) = 0$.

---
[0]**voor vervolg z.o.z**

2. Gegeven het volgende randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} -y'' + x^2 y = x, \text{ voor } x \in (0,1) \\ y(0) = 0, y(1) = 1. \end{cases} \tag{5}$$

We benaderen de oplossing van dit probleem met behulp van eindige differenties. De roosterpunten worden gegeven door $x_j = jh$, $j \in \{0, \ldots, n\}$ met $h = \dfrac{1}{n}$.

a Geef een discretisatie (+bewijs) van $-y'' + x^2 y = x$ waarbij de afbreekfout van de orde $O(h^2)$ is.

b Geef voor $n = 4$ het stelsel $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ waaraan de numerieke oplossing w_i moet voldoen.

In het vervolg van de opgave wordt het volgende probleem bekeken:

$$-y''(x) = 1, \text{ voor } x \in (0,1), y(0) = 0, y(1) = 1. \tag{6}$$

Stel dat de oplossing gegeven in de roosterpunten $x_j = jh$ voor $j \in \{0, \ldots, 3\}$ met $h = \frac{1}{3}$: $y_0 = 0$, $y_1 = 0.4444$, $y_2 = 0.7778$ en $y_3 = 1$.

c Bepaal met lineaire interpolatie een benadering $p(0.5)$ voor $f(0.5)$. Hoe groot is de afbreekfout?

d We benaderen de afgeleide y' in x_1 met behulp van voorwaartse differentie:

$$y'(x_1) \approx \frac{y_2 - y_1}{h}, \text{ met wederom } -y''(x) = 1 \text{ en } h = \frac{1}{3}. \tag{7}$$

i Toon aan dat de absolute waarde van de afbreekfout gegeven wordt door $\dfrac{h}{2}$.

ii Stel dat voor de numerieke oplossing w_i geldt ten opzichte van de exacte oplossing y_i:

$$|y_i - w_i| < 0.01. \tag{8}$$

Hoe groot kan de extra fout maximaal zijn ten gevolge van deze onnauwkeurigheid als we de voorwaartse differentie (7) uitvoeren met de numerieke gegevens in plaats van met de exacte gegevens.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html