

**TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3 097 TU)
dinsdag 23 maart 2004, 9:00-12:00**

1. Gegeven is de predictor-corrector formule

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_j, w_j) \\ k_2 = hf(t_j + h, w_j + k_1) \\ w_{j+1} = w_j + (1 - \beta)k_1 + \beta k_2 \end{cases} \quad (1)$$

voor het integreren van de differentiaalvergelijking $y' = f(t, y)$.

- (a) Toon aan, dat de locale afbreekfout $O(h^2)$ is als $\beta = \frac{1}{2}$ en anders $O(h)$.
- (b) Bepaal de versterkingsfactor $Q(h\lambda)$, van deze methode.
- (c) Zij gegeven het volgende stelsel

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \underline{f}(t), \quad \underline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Hierin is $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. Laat zien dat dit stelsel alleen geïntegreerd kan worden als $\beta > \frac{1}{2}$. Geef voor dit geval een stabiliteitscriterium.

- (d) (i) Geef de locale afbreekfout van de voorwaartse methode van Euler.
- (ii) Laat zien dat voor stelsel (1) Euler voorwaarts altijd instabiel is.

2. We willen de integraal $\int_a^b f(x)dx$ gaan benaderen met een numerieke methode.

- (a) Benader de integraal voor $f(x) = x^4$, $a = -1$ en $b = 1$ met de gerepeteerde Trapeziumregel met $h = \frac{1}{2}$ en bepaal het verschil met het echte antwoord.
- (b) De gerepeteerde Trapeziumregel wordt toegepast op de met meetfouten belaste functie \hat{f} waarbij $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon$ voor $x \in [a, b]$. Geef een bovengrens voor de absolute fout in de benadering ten gevolge van de meetfouten.
- (c) We gaan nu een nieuwe integratiemethode afleiden. Geef een uitdrukking voor het Taylorpolynoom $P_1(x)$ van de eerste orde rond steunpunt $\frac{a+b}{2}$. Geef de formule voor de afbreekfout: $f(x) - P_1(x)$.

⁰voor vervolg z.o.z

- (d) Laat met behulp van het antwoord uit 2c zien dat de integratieregels gebaseerd op $P_1(x)$ voor $\int_a^b f(x)dx$ gegeven wordt door

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

en geef een bovengrens voor de bijbehorende afbreekfout.

- (e) Geef voor de nieuwe integratiemethode de gerepeteerde methode en de afbreekfout hiervan.
- (f) Aan welke methode geeft u de voorkeur: de methode uit 2e of de Trapeziumregel (+ motivatie). Er mag gebruikt worden dat de afbreekfout van de gerepeteerde Trapeziumregel begrensd wordt door: $\frac{(b-a)h^2}{12} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
<http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html>