TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3 097 TU)
woensdag 21 januari 2004, 14:00-17:00

1. We willen de inslagsnelheid meten van een zwaar voorwerp dat precies verticaal naar beneden komt. De herkomst van het voorwerp is onbekend; we beschikken alleen over een amateur-video opname van de laatste 15 meter van de val. Daaruit kunnen we de hoogten y van het voorwerp op een aantal tijdstippen vóór de inslag reconstrueren. De gegevens staan in onderstaande tabel (het inslagtijdstip wordt op t=1 gesteld). De hoogten zijn met een maximale nauwkeurigheid van niet meer dan 0.2 meter vast te stellen.

t (sec)	$y(t)$ (m)
0.0	14.9
0.1	14.0
0.2	12.9
0.3	11.5
0.4	10.2
0.5	8.8
0.6	7.3
0.7	5.5
0.8	3.8
0.9	2.0
1.0	0

   (a) We gebruiken eerst een simpele achterwaartse differentie voor de inslagsnelheid $y'(1)$:
   $$y'(1) \approx \frac{y(1) - y(1-h)}{h}. \qquad (1)$$
   Leidt een uitdrukking voor de afbreekfout (truncation error) van deze formule af. (Opmerking: bij toepassing van (1) hebben we de beschikking over alle tabelwaarden; h hoeft dus niet gelijk aan de tabelstapgrootte 0.1 te zijn.)

   (b) We verwachten, gezien de ruwheid van de waarnemingen, dat de meetfouten in de tabel een belangrijke invloed hebben op de resultaten. Dat vermoeden wordt bevestigd als we de totale fout (= afbreekfout + meetfout) gaan optimaliseren. Bepaal de stapgrootte waarvoor de totale fout zo klein mogelijk is. Bij deze

[0]**voor vervolg z.o.z**

analyse mag worden aangenomen dat de val van het voorwerp eenparig versneld is en dat de zwaartekrachtsversnelling 10 m/sec/sec is; verder is de hoogte op het moment van inslag natuurlijk precies gelijk aan 0.

(c) Geef een approximatie voor $y'(1)$ op basis van de analyse onder (b) en bepaal een bovengrens voor de totale fout.

(d) Stel dat we de nauwkeurigheid onder (c) te gering vinden en we naar een betere approximatie gaan zoeken. Wat is in dit probleem het voordeel van een 3- of meerpunts formule voor $y'(1)$?

(e) Een geschikte 3-punts formule voor $y'(1)$ wordt gegeven door

$$y'(1) \approx \frac{3y(1) - 4y(1-h) + y(1-2h)}{2h}. \qquad (2)$$

Bepaal de afbreekfout van deze formule.

(f) Benader $y'(1)$ met (2) en geef weer een bovengrens voor de totale fout. Kies daarbij de stapgrootte optimaal.

(g) Verwacht u dat 4- of meerpunts formules de nauwkeurigheid verder kunnen verbeteren (motiveer uw antwoord)?

2. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = A\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}(t), \text{ met } \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0,$$

waarbij A een 2×2 matrix is: $A = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}, \quad a > 0.$

(a) Toon aan dat de eigenwaarden van A gegeven worden door $\lambda_{1,2} = -a \pm i$.

(b) Laat zien dat de Euler Voorwaarts methode toegepast op dit stelsel alleen stabiel is als $h \leq \frac{2a}{a^2+1}$.

(c) De trapeziumregel voor $\frac{du}{dt} = f(t, u)$ wordt gegeven door:

$$w_{j+1} = w_j + \frac{h}{2}[f(t_j, w_j) + f(t_{j+1}, w_{j+1})].$$

Laat zien dat de versterkingsfactor gegeven wordt door $Q(h\lambda) = \frac{1+\frac{1}{2}h\lambda}{1-\frac{1}{2}h\lambda}$.

(d) Leidt hieruit af dat de trapeziumregel toegepast op het stelsel onvoorwaardelijk stabiel is.

Kies $a = 2$, $\boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$ en $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $h = 0.5$.

(e) Doe één stap met de Euler Voorwaarts methode.

(f) Doe één stap met de trapeziumregel.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html