

**TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
vrijdag 27 augustus 2004, 9:00-12:00**

1. Voor het numeriek oplossen van de differentiaalvergelijking $y' = f(t, y)$ met $y(0) = y_0$, gebruikt men de numerieke methode

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k + \frac{1}{2}h, w_k + \frac{1}{2}hf(t_k, w_k)) \quad (1)$$

- (a) Is deze methode impliciet of expliciet?
(b) Laat zien, dat de afbreekfout van deze methode $O(h^2)$ is.
(c) We integreren met behulp van methode (1) de DV $y' = f(t, y)$ tweemaal, van $t = 0$ tot $t = 1$, eenmaal met stapgrootte h_1 en eenmaal met stapgrootte $h_2 = \frac{1}{2}h_1$. In $t = 1$ vinden we de numerieke oplossingen $w_1(1)$ respectievelijk $w_2(1)$. Voor de fout in het meest nauwkeurige resultaat geldt:

$$y(1) - w_2(1) \approx K(w_2(1) - w_1(1)).$$

Bepaal K met behulp van Richardsoncorrectie.

- (d) Toon aan, dat de versterkingsfactor van methode (1) wordt gegeven door:

$$Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}.$$

- (e) Methode (1) wordt gebruikt voor integratie van de tweede orde differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' + 5y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Ga na of de numerieke integratie van deze vergelijking met methode (1) en stapgrootte $h = 0.1$ stabiel is. (Hint: schrijf de differentiaalvergelijking als een stelsel van 2 eerste orde differentiaalvergelijkingen)

2. Gegeven het randwaarde probleem

$$-y''(x) = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad \text{met } y'(0) = 0, y(1) = 1.$$

De roosterpunten worden gegeven door $x_j = jh$, $j = 0, \dots, n$ met $h = 1/n$.

⁰voor vervolg z.o.z

- (a) Geef een discretisatie van $-y_j'' = f_j$ waarbij de afbreekfout van de tweede orde is (+ bewijs). In dit onderdeel hoeven de randvoorwaarden nog niet meegenomen te worden.
- (b) Voor de discretisatie van de linker randvoorwaarde wordt gebruik gemaakt van een virtueel punt $x_{-1} = -h$. Geef een discretisatie van $y'(0) = 0$ van de tweede orde (+ bewijs).
- (c) Geef voor $n = 4$ en $f(x) = x$ het stelsel $Au = b$, waaraan de numerieke benadering u moet voldoen.
- (d) Stel de oplossing van het probleem

$$-y''(x) = 1, \quad x \in [0, 1], \quad \text{met } y(0) = 0, y(1) = 1$$

is gegeven in de roosterpunten: $y_0 = 0$, $y_1 = 0.4444$, $y_2 = 0.7778$ en $y_3 = 1$. Bepaal met deze gegevens een benadering $p(0.5)$ van $y(0.5)$ met behulp van lineaire interpolatie. Geef een bovengrens voor de afbreekfout van de interpolatie.

- (e) Als voor de numerieke oplossing u geldt: $\|y_j - u_j\| < 0.01$. Geef een bovengrens voor de extra fout als we interpolatie uitvoeren op u_j in plaats van y_j .

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
<http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html>