TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit der Informatietechnologie en Systemen

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3 097 TU)
dinsdag 25 maart 2003, 9:00-12:00

1. Voor het numeriek oplossen van de differentiaalvergelijking $y' = f(t, y)$ gebruikt men de numerieke methode

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k + \frac{1}{2}h, w_k + \frac{1}{2}hf(t_k, w_k)) \tag{1}$$

   (a) Laat zien, dat de afbreekfout van deze methode $O(h^2)$ is.

   (b) We integreren met behulp van methode (1) de DV $y' = f(t, y)$ tweemaal, van $t = 0$ tot $t = 1$, eenmaal met stapgroote h_1 en eenmaal met stapgrootte $h_2 = \frac{1}{2}h_1$. In $t = 1$ vinden we de numerieke oplossingen $w_1(1)$ respectievelijk $w_2(1)$. Voor de fout in het meest nauwkeurige resultaat geldt:

$$y(1) - w_2(1) \approx K(w_2(1) - w_1(1)).$$

   Bepaal K met behulp van Richardsoncorrectie.

   (c) Toon aan, dat de versterkingsfactor van methode (1) wordt gegeven door:

$$Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}$$

   (d) Methode (1) wordt gebruikt voor integratie van het stelsel

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \tag{2}$$

   Ga na of de numerieke integratie van dit stelsel met methode (1) met stapgrootte $h = 0.2$ stabiel is.

[0]**voor vervolg z.o.z**

2. We beschouwen tweede orde Lagrange interpolatie: $f(x) = p(x) + r(x)f'''(\xi)$. De formule voor p is hieronder gedeeltelijk gegeven:

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \text{ met} L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}.$$

(a) Geef de formules voor $L_1(x)$ en $L_2(x)$.

(b) We hebben de volgende tabel:

x	0	0.1	0.4
e^x	1	1.1051	1.4918

Geef hiermee een benadering van $e^{0.2}$.

(c) Stel dat $f(0.4)$ een afrondfout bevat en $|\hat{f}(0.4) - f(0.4)| < \epsilon$. Laat zien dat $|\hat{p}(x) - p(x)| < \epsilon$ voor alle $x \in [0, 0.4]$.

We nemen nu $x_0 = 0$, $x_1 = h$ en $x_2 = 2h$ en gaan een benadering bepalen voor $f'(0)$.

(d) Leid met behulp van Taylor de afbreekfout af van de voorwaartse differentie: $\frac{f(h)-f(0)}{h}$.

(e) Geef een formule om $f'(0)$ te benaderen met behulp van $f(x_0)$, $f(x_1)$ en $f(x_2)$ zodanig dat de afbreekfout $O(h^2)$ is.

(f) Bepaal met beide methoden een benadering voor $f'(0)$ voor de functie $f(x) = sin(x) + 1$. Gebruik hiervoor de waarden uit de tabel:

x	0	0.1	0.2
$sin(x) + 1$	1	1.0998	1.1986

Bepaal het verschil met het exacte antwoord. Aan welke methode geeft u de voorkeur?

(g) Geef voor de voorwaartse differentie een numerieke schatting van de afbreekfout. Als we aannemen dat $|\hat{f}(0.1) - f(0.1)| < 0.5 \times 10^{-4}$, hoe groot is dan de afrondfout in de voorwaartse differentie? Is het zinvol om de stapgrootte h te verkleinen (+ motivatie)?

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html