TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT DER INFORMATIETECHNOLOGIE EN SYSTEMEN

UITWERKING TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3 097 TU)
dinsdag 25 maart 2003, 9:00-12:00

1. (a) De afbreekfout van een numerieke methode

$$w_{k+1} = w_k + h\Phi(t_k, w_k) \tag{1}$$

wordt gegeven door

$$E(t_{k+1}) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \Phi(t_k, y_k) \tag{2}$$

waarin y_k de exacte waarde in t_k is. We ontwikkelen y_{k+1} in een Taylor polynoom:

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!}y''_k + O(h^3)$$

waaruit volgt, dat

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y'_k + \frac{h}{2}y''_k + O(h^2) \tag{3}$$

Verder is

$$\Phi(t_k, y_k) = f(t_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hf(t_k, y_k))$$

Met behulp van het Taylorpolynoom in twee variabelen vinden we:

$$\Phi(t_k, y_k) = f(t_k, y_k) + \tfrac{1}{2}h\tfrac{\partial f}{\partial t}(t_k, y_k) + \tfrac{1}{2}h\tfrac{\partial f}{\partial y}(t_k, y_k)f(t_k, y_k) + O(h^2) \tag{4}$$

Wegens de differentiaalvergelijking geldt $f(t_k, y_k) = y'_k$ en nogmaals differentiëren van de DV naar t geeft

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}f \tag{5}$$

Hieruit vinden we door combinatie van (4) en (5):

$$\Phi(t_k, y_k) = y'_k + \tfrac{1}{2}hy''_k + O(h^2)$$

Dit resultaat met (3) gesubstitueerd in (2) geeft dan het gevraagde resultaat.

(b) De methode heeft een fout van $O(h^2)$, dus er geldt:

$$y(1) - w_1(1) \approx Ch_1^2 \tag{6}$$

en

$$y(1) - w_2(1) \approx Ch_2^2 = \tfrac{1}{4}Ch_1^2 \tag{7}$$

Trek (7) af van (6), dat geeft:

$$w_2(1) - w_1(1) = \tfrac{3}{4}Ch_1^2$$

In combinatie met (7) geeft dit:

$$y(1) - w_2(1) \approx \tfrac{1}{3}(w_2(1) - w_1(1))$$

(c) Pas de methode toe op $y' = \lambda y$. Dit geeft:

$$w_{k+1} = w_k + h\lambda(w_k + \tfrac{1}{2}h\lambda w_k)$$

ofwel

$$w_{k+1} = (1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2})w_k$$

(d) De eigenwaarden van de matrix $\begin{pmatrix} -10 & 5 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}$ worden gegeven door $\lambda_{1,2} = -10 \pm 5i$, dus $h\lambda = -2 \pm i$ voor $h = 0.2$. Dit gesubstitueerd in de versterkingsfactor geeft

$$Q(-2+i) = 1 - 2 + i + \frac{(-2+i)^2}{2}$$

ofwel

$$Q(-2+i) = 0.5 - i$$

en $|Q(-2+i)|^2 = 1.25 > 1$ dus de integratie is niet stabiel voor deze stapgrootte.

2. (a) De formules voor $L_1(x)$ en $L_2(x)$ zijn:

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \text{ en } L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

(b) Voor de benadering merken we op dat $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$ en $x_2 = 0.4$. Dit invullen in de formules geeft:

$$L_0(0.2) = \frac{(0.1)(-0.2)}{(-0.1)(-0.4)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$L_1(0.2) = \frac{(0.2)(-0.2)}{(0.1)(-0.3)} = \frac{-4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$L_2(0.2) = \frac{(0.2)(0.1)}{(0.4)(0.3)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

De benadering wordt dus gegeven door: $-\frac{1}{2} \cdot 1 + 1\frac{1}{3} \cdot 1.1051 + \frac{1}{6} \cdot 1.4918 = 1.2221.$

(c) Merk op dat $|\hat{p}(x) - p(x)| < max_{x\in[x_0,x_2]}|L_2(x)|\epsilon$. Als we aangetoond hebben dat $max_{x\in[x_0,x_2]}|L_2(x)| \leq 1$ dan is het gestelde bewezen. We vullen eerst de gegevens in:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x)(x-0.1)}{(0.4)(0.3)}$$

Om $max_{x\in[0,0.4]}|L_2(x)|$ te bepalen beschouwen we $max_{x\in[0,0.1]}\frac{(x)(0.1-x)}{0.12} \leq \frac{0.05\cdot 0.05}{0.12} = 0.0208$ en $max_{x\in[0.1,0.4]}\frac{(x)(x-0.1)}{0.12}$. Deze laatste functie heeft geen inwendig maximum, dus geldt $max_{x\in[0.1,0.4]}\frac{(x)(x-0.1)}{0.12} \leq \frac{0.4\cdot 0.3}{0.12} = 1$, waarmee het gestelde bewezen is.

(d) Eenvoudig is in te zien dat $f(h) = f(0) + hf'(0) + O(h^2)$. Hieruit volgt dat $f'(0) - \frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0) - \frac{f(0)+hf'(0)+O(h^2)-f(0)}{h} = O(h)$.

(e) Schrijf voor $f(0)$, $f(h)$ en $f(2h)$ de Taylorontwikkeling op.

$$f(0) = f(0) \quad (8)$$

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + O(h^3) \quad (9)$$

$$f(2h) = f(0) + 2hf'(0) + \frac{4h^2}{2!}f''(0) + O(h^3) \quad (10)$$

We beschouwen nu de formule $\alpha_0 f(0)+\alpha_1 f(h)+\alpha_2 f(2h)$ en proberen de waarden van α_0, α_1 en α_2 zo te bepalen dat $f'(0)-(\alpha_0 f(0)+\alpha_1 f(h)+\alpha_2 f(2h)) = O(h^2)$. Gebruik makend van bovenstaande Taylorontwikkelingen moet dus gelden:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 h + \alpha_2 2h = 1$$

$$\alpha_1 \frac{h^2}{2!} + \alpha_2 2h^2 = 0$$

Dit oplossen geeft: $\alpha_0 = \frac{-3}{2h}$, $\alpha_1 = \frac{4}{2h}$ en $\alpha_2 = \frac{-1}{2h}$. De formule is dus

$$\frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h}.$$

(f) Voorwaartse differentie: benadering 0.998 fout 0.002.
Hogere orde formule: benadering 1.003 fout 0.003.

De voorwaartse differentie heeft de voorkeur omdat de fout kleiner is en het minder functie-evaluaties kost om deze formule toe te passen.

(g) De afbreekfout is $\frac{h}{2!}f''(\xi)$ met $\xi \in [0, 0.1]$. In dit voorbeeld is $f''(x) = -sin(x)$ zodat de absolute waarde van de afbreekfout kleiner is dan $\frac{0.1}{2}sin(0.1) = 0.499 \cdot 10^{-2}$. Voor de absolute afrondfout geldt dat deze kleiner is dan $\frac{|\hat{f}(0.1)-f(0.1)|}{h} = 0.5 \cdot 10^{-3}$. Merk op dat de afbreekfout groter is dan de afrondfout. Het is dus zinvol om de stapgrootte te verkleinen.