TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT DER INFORMATIETECHNOLOGIE EN SYSTEMEN

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3 097 TU)
woensdag 8 januari 2003, 14:00-17:00

1. We beschouwen de volgende klasse van predictor-corrector methoden

$$w_{n+1}^* = w_n + \alpha h f(t_n, w_n),$$

$$w_{n+1} = w_n + \beta h f(t_n, w_n) + (1-\beta) h f(t_n + \alpha h, w_{n+1}^*)$$

De parameters α en β kunnen gebruikt worden om bepaalde eigenschappen van de methode naar behoefte aan te passen. We beperken ons tot α- en β-waarden die voldoen aan $\alpha(1-\beta) > \frac{1}{8}$.

(a) Bepaal de lokale afbreekfout van de methode. Onder welke conditie voor α en β is de grootte van de lokale afbreekfout $O(h^2)$?

(b) Bereken de versterkingsfactor van de methode. Toon voor reële negatieve λ aan dat de stabiliteitsvoorwaarde gegeven wordt door

$$h < \frac{1}{\alpha(1-\beta) \mid \lambda \mid}.$$

(Denk eraan dat we $\alpha(1-\beta) > \frac{1}{8}$ verondersteld hebben!)

(c) We passen de methode toe op een test-stelsel $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$ met

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}.$$

Geef de stabiliteitsvoorwaarde.

(d) Pas de methode vervolgens toe op een test-stelsel met

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Leid het stabiliteitscriterium af en geef de voorwaarde waaraan α en β moeten voldoen opdat stabiele integratie van dit stelsel mogelijk is.

[0] **voor vervolg z.o.z**

(e) Stel we willen een *stijf* stelsel differentiaalvergelijkingen met reële eigenwaarden approximeren met één van de volgende methoden: (i) $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$; (ii) $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$. Welke van de twee methoden is het meest geschikt? Motiveer uw antwoord.

2. In deze opgave beschouwen we numerieke methoden voor het oplossen van niet lineaire vergelijkingen.

   (a) Gegeven de vaste punt methode $p_{n+1} = g(p_n)$, met $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Geef een uitdrukking voor $\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p}{p_n-p}$.

   (b) We zoeken het positieve nulpunt van $f(x) = x^2 - x - 2$. Gebruik $g(x) = \frac{2}{x} + 1$ en toon aan dat een vast punt van g een nulpunt is van f. Laat zien dat de methode convergeert in de buurt van het positieve nulpunt van f.

   (c) Neem $p_0 = 1$ en bepaal p_3. Teken het iteratieproces van de vaste punt methode.

   (d) Neem $p_0 = 1$ en bepaal p_3 met de Newton-Raphson methode.

   (e) Stel dat de term -2 in f gemeten is met een maximale meetfout ter grootte ϵ. Voor f nemen we dus $\hat{f}(x) = x^2 - x - (2 + \delta)$, waarbij $|\delta| < \epsilon \ll 1$. Stel dat we het positieve nulpunt $\hat{p}$ van $\hat{f}$ bepaald hebben met een zodanige nauwkeurigheid, dat je $\hat{f}(\hat{p}) = 0$ mag veronderstellen. Laat zien dat $f(\hat{p}) = \delta$. Toon hiermee aan dat, onder verwaarlozing van tweede orde termen, geldt

   $$|\hat{p} - p| < \frac{\epsilon}{|f'(p)|} = \frac{\epsilon}{3}.$$

   (f) Gegeven het niet lineaire stelsel

   $$\begin{aligned} 2x_1 + x_1x_2 &= 3, \\ x_1x_2 + x_2 &= 2. \end{aligned}$$

   Doe 1 iteratie met de Newton-Raphson methode met $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html