Technische Universiteit Delft
Faculteit der Informatietechnologie en Systemen

Uitwerkingen TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3 097 TU)
woensdag 8 januari 2003, 14:00-17:00

1. (a) De afbreekfout is gedefinieerd als:

$$\tau_{n+1} = \frac{y_{n+1} - \bar{w}_{n+1}}{h},$$

waarbij $\bar{w}_{n+1}$ gedefinieerd is door de methode toe te passen met $w_n = y_n$ en y_{n+1} is de exacte oplossing. We gebruiken de notatie $f_n = f(t_n, y_n)$. Taylor ontwikkeling geeft:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + O(h^3).$$

Invullen van de gegevens geeft:

$$\bar{w}_{n+1} = y_n + \beta h f_n + (1-\beta)hf(t_n + \alpha h, y_n + \alpha h f_n).$$

Taylor ontwikkeling van f in twee variabelen geeft:

$$\bar{w}_{n+1} = y_n + \beta h f_n + (1-\beta)h[f_n + \alpha h(\frac{\partial f}{\partial t})_n + \alpha h f_n(\frac{\partial f}{\partial y})_n] + O(h^3).$$

Merk op dat $y' = f(t,y)$, dus $y'' = \frac{df(t,y(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}f$, dus

$$\bar{w}_{n+1} = y_n + hy'_n + \alpha(1-\beta)h^2y''_n + O(h^3).$$

De Taylor ontwikkeling van y_{n+1} en bovenstaande uitdrukking invullen in de definitie van τ_{n+1} geeft:

$$\tau_{n+1} = (\frac{1}{2} - \alpha(1-\beta))hy''_n + O(h^2).$$

De afbreekfout is dus alleen $O(h^2)$ als $\alpha(1-\beta) = \frac{1}{2}$. Anders is de afbreekfout $O(h)$.

(b) Pas de methode toe op de test-vergelijking $y' = \lambda y$:

$$w_{n+1} = w_n + \beta h\lambda w_n + (1-\beta)h\lambda(w_n + \alpha h\lambda w_n)$$

Dus

$$w_{n+1} = [1 + h\lambda + \alpha(1-\beta)(h\lambda)^2]w_n.$$

De versterkingsfactor is dus: $Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \alpha(1-\beta)(h\lambda)^2$.
De methode is stabiel voor reële negatieve λ als geldt:

$$-1 < 1 + h\lambda + \alpha(1-\beta)(h\lambda)^2 < 1.$$

Voor de linker ongelijkheid moet dus gelden:

$$0 < 2 + h\lambda + \alpha(1-\beta)(h\lambda)^2$$

Deze dalparabool heeft reële nulpunten als de discriminant positief is. De discriminant is gelijk aan $1 - 4 \cdot 2 \cdot \alpha(1-\beta) = 1 - 8\alpha(1-\beta)$. Omdat gegeven is dat $\alpha(1-\beta) > \frac{1}{8}$ heeft de dalparabool geen reële nulpunten en is er altijd aan de linker ongelijkheid voldaan.

Voor de rechter ongelijkheid geldt:

$$h\lambda + \alpha(1-\beta)(h\lambda)^2 < 0.$$

Delen door $h\lambda$ geeft:

$$1 + \alpha(1-\beta)h\lambda > 0.$$

Hieruit volgt:

$$h < \frac{-1}{\alpha(1-\beta)\lambda} = \frac{1}{\alpha(1-\beta)|\lambda|}.$$

(c) Het karakteristieke polynoom van de matrix is $(-\frac{1}{2}-\lambda)[(-4-\lambda)^2-9]$. De eigenwaarden van het stelsel zijn gelijk aan $-\frac{1}{2}$, -1 en -7. De stabiliteitsvoorwaarde is dus

$$h < \frac{1}{7\alpha(1-\beta)}.$$

(d) Merk op dat de eigenwaarden van deze matrix gelijk zijn aan i en $-i$. De versterkingsfactor is dan $Q(hi) = 1 + ih - \alpha(1-\beta)h^2$. Voor stabiliteit moet gelden $|Q(hi)| < 1$. Dit betekent:

$$|Q(hi)|^2 = (1 - \alpha(1-\beta)h^2)^2 + h^2 < 1$$

Uitwerken geeft:

$$1 - 2\alpha(1-\beta)h^2 + (\alpha(1-\beta)h^2)^2 + h^2 < 1.$$

De term 1 valt eruit. Delen door h^2 geeft dan:

$$1 - 2\alpha(1-\beta) + (\alpha(1-\beta))^2h^2 < 0,$$

zodat de stabiliteitsvoorwaarde gegeven wordt door:

$$h^2 < \frac{2\alpha(1-\beta) - 1}{(\alpha(1-\beta))^2}.$$

De grens voor de stapgrootte is alleen positief als $\alpha(1-\beta) > \frac{1}{2}$.

(e) Voor een stijf stelsel geldt dat de kleinste eigenwaarde veel kleiner is dan de grootste eigenwaarde. De fout wordt na een instel-periode voornamelijk bepaald door de grootste eigenwaarde. De stabiliteit wordt echter bepaald door de kleinste eigenwaarde. Bij methode (i) is de fout kleiner dan bij methode (ii). Echter de stabiliteitsvoorwaarde bij methode (i) is $h < \frac{2}{|\lambda|}$ en bij methode (ii) is $h < \frac{4}{|\lambda|}$. Verder is de hoeveelheid werk per tijdstap bij beide methoden hetzelfde. Conclusie voor een stijf stelsel heeft methode (ii) de voorkeur, omdat er met minder werk een goede oplossing bepaald kan worden.

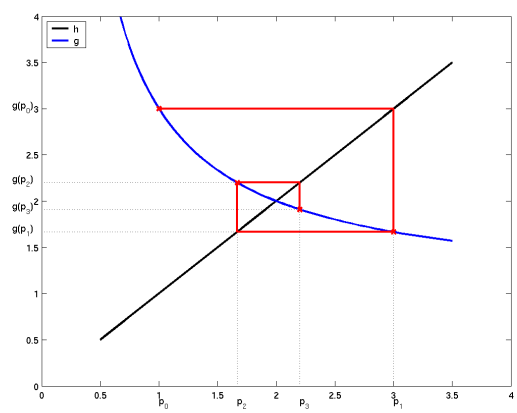
2. (a) Merk op dat

$$\frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} = \frac{g(p_n) - g(p)}{p_n - p} = g'(\xi),$$

waarbij ξ tussen p_n en p zit. De laatste gelijkheid volgt uit de middelwaardestelling, of Taylor ontwikkeling. Bij de limietovergang volgt dus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p}{p_n-p} = g'(p)$.

(b) Voor een vast punt geldt $p = g(p)$. Dit invullen geeft: $p = \frac{2}{p} + 1$. Vermenigvuldiging met p geeft $p^2 = 2 + p$, zodat $p^2 - p - 2 = f(p) = 0$. Dit mag ook gecontroleerd worden door beide nulpunten in te vullen. Er is convergentie als $|g'(p)| < 1$. De afgeleide van g is: $g'(x) = \frac{-2}{x^2}$. Voor het positieve nulpunt $p = 2$ geldt dus $|g'(p)| = \frac{2}{p^2} = \frac{1}{2} < 1$ en dus is de methode convergent.

(c) Invullen geeft $p_0 = 1$, $p_1 = 3$ $p_2 = \frac{5}{3}$ en $p_3 = 2\frac{1}{5}$.



(d) De formule voor de Newton-Raphson methode is: $p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$. Bepalen van f' geeft: $f'(x) = 2x - 1$ zodat

$$p_{n+1} = p_n - \frac{(p_n)^2 - p_n - 2}{2p_n - 1}.$$

Invullen geeft $p_0 = 1$, $p_1 = 3$ $p_2 = 2.2$ en $p_3 = 2.0118$. Merk op dat p_3 een betere benadering is van de echte wortel $p = 2$, dan bij de vaste punt methode.

(e) Merk op dat uit $\hat{f}(\hat{p}) = 0$ volgt:

$$\hat{f}(\hat{p}) = \hat{p}^2 - \hat{p} - (2 + \delta) = 0.$$

Hieruit volgt:

$$f(\hat{p}) = \hat{p}^2 - \hat{p} - 2 = \delta.$$

Taylor ontwikkeling geeft

$$f(\hat{p}) = f(p) + (\hat{p} - p)f'(p) + O((\hat{p} - p)^2).$$

Verwaarlozen van de tweede orde term en gebruiken van $f(p) = 0$ geeft: $\delta = (\hat{p} - p)f'(p)$. Hieruit volgt:

$$|\hat{p} - p| = \frac{|\delta|}{|f'(p)|} \leq \frac{|\epsilon|}{|f'(p)|} = \frac{|\epsilon|}{3}$$

(f) Definieer de volgende twee functies:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 2x_1 + x_1 x_2 - 3, \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1 x_2 + x_2 - 2. \end{aligned}$$

Dan komt het oplossen van het niet-lineaire stelsel overeen met het zoeken van een nulpunt van $\vec{f}$. De methode is nu

$$\vec{p}_{n+1} = \vec{p}_n - J^{-1}(\vec{p}_n)\vec{f}(\vec{p}_n),$$

waarbij $J^{-1}(\vec{p}_n)$ de Jacobiaan is. De Jacobiaan is:

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 + x_2 & x_1 \\ x_1 & 1 + x_1 \end{pmatrix}.$$

Invullen geeft:

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$