TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3 097 TU)
vrijdag 29 augustus 2003, 9:00-12:00

1. Gegeven is het iteratieproces

$$x_{n+1} = x_n + h(x_n)(x_n^3 - 3),$$

waarbij h een continue functie is met $h(x) \neq 0$ voor elke x.

   (a) Als dit proces convergeert, naar welke limiet p convergeert het dan?

   (b) Beschouw drie mogelijke keuzen voor $h(x)$:

      i. $h_1(x) = -\frac{1}{x^4}$

      ii. $h_2(x) = -\frac{1}{x^2}$

      iii. $h_3(x) = -\frac{1}{3x^2}$

   Voor welke keuze kan het proces niet convergeren? Voor welke keuze convergeert het proces het snelst?

   (c) Voor zekere keuze van $h(x)$ krijgen we een lineair convergent proces (dwz $p - x_n = K(p - x_{n-1})$). Toon aan dat geldt:

$$K = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \text{ en } p - x_n = \frac{K}{1-K}(x_n - x_{n-1}).$$

   (d) Voor deze keuze van $h(x)$ vinden we de volgende drie iteraten:

$$\begin{aligned} x_{n-2} &= 1.4429586 \\ x_{n-1} &= 1.4423477 \\ x_n &= 1.4422631 \end{aligned}$$

   Schat de fout in x_n uit deze drie iteratiewaarden.

[0] **voor vervolg z.o.z**

2. Gegeven is de numerieke integratiemethode:

$$u_{n+1} = u_n + h\{\frac{3}{2}f(x_n, u_n) - \frac{1}{2}f(x_{n-1}, u_{n-1})\} \tag{1}$$

voor integratie van de gewone differentiaalvergelijking $y' = f(x, y)$ met beginvoorwaarde $y(x_0) = y_0$.

   (a) Toon aan dat de locale afbreekfout $O(h^2)$ is. Hierbij mag worden aangenomen, dat de exacte oplossing in zowel x_{n-1} als x_n bekend is.

   (b) Pas methode (1) toe op de testvergelijking. Voor de versterkingsfactor $C(h\lambda)$ geldt $u_{n+1} = C(h\lambda)u_n$ voor alle waarden van n. Leid hieruit af, dat moet gelden:

$$\{C(h\lambda)\}^2 - (1 + \tfrac{3}{2}h\lambda)C(h\lambda) + \tfrac{1}{2}h\lambda = 0 \tag{2}$$

   Geef een stabiliteitscriterium, dat geldig is voor reële, negatieve λ.

   (c) Gegeven is het beginwaardenprobleem

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = t, \quad y(0) = 0, \frac{dy}{dt}(0) = 1. \tag{3}$$

   Schrijf deze vergelijking als een stelsel eerste orde vergelijkingen en bepaal de eigenwaarden van de in dit stelsel optredende matrix.

   (d) Men integreert dit stelsel numeriek als volgt: in de eerste stap past men de Euler Voorwaarts methode toe en in alle volgende stappen methode (1). Neem $h = \frac{1}{2}$ en bepaalde de eerste twee stappen van dit proces.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html