TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

UITWERKING TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3 097 TU)
vrijdag 29 augustus 2003, 9:00-12:00

1. (a) Het iteratieproces is een vaste punt methode (of Picard methode). Bij convergentie geldt: $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Als we dit gebruiken bij het iteratieproces, dan geldt:
$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} [x_n + h(x_n)(x_n^3 - 3)]$$
Omdat de functie h continu is geldt:
$$p = p + h(p)(p^3 - 3)$$
zodat
$$h(p)(p^3 - 3) = 0.$$
Omdat $h(x) \neq 0$ voor elke x geldt $p^3 - 3 = 0$ en dus is $p = 3^{\frac{1}{3}}$.

(b) De convergentie van de vaste punt methode $x_{n+1} = g(x_n)$ wordt bepaald door $g'(p)$ als $|g'(p)| < 1$ dan is er convergentie en de fout neemt per stap af met een factor $|g'(p)|$. We gaan nu voor elk van de functies de eerste afgeleide in p bepalen. Voor de eerste functie geven we alle tussenstappen, terwijl voor de andere alleen de antwoorden gegeven worden.
Voor h_1 geldt dat $g_1(x) = x - \frac{x^3-3}{x^4}$. De eerste afgeleide is:
$$g_1'(x) = 1 - \frac{3x^2 \cdot x^4 - (x^3 - 3) \cdot 4x^3}{(x^4)^2}$$
Invullen van p geeft:
$$g_1'(p) = 1 - \frac{3p^6 - (p^3 - 3) \cdot 4p^3}{p^8}$$
Omdat $p = 3^{\frac{1}{3}}$ valt de laatste term weg en geldt:
$$g_1'(p) = 1 - \frac{3p^6}{p^8} = 1 - 3^{\frac{1}{3}} = -0.4422$$
Dus de methode is convergent met convergentiefactor 0.4422.

Voor de tweede functie geldt:
$$g_2'(p) = 1 - \frac{3p^4 - (p^3 - 3) \cdot 2p}{p^4} = 1 - \frac{3p^4}{p^4} = -2$$

Dus de methode divergeert.

Voor de derde functie geldt:

$$g_3'(p) = 1 - \frac{9p^4 - (p^3-3)\cdot 6p}{9p^4} = 1 - \frac{9p^4}{9p^4} = 0$$

Dus de methode is convergent met convergentiefactor 0.

De derde methode convergeert het snelst (dit is de Newton-Raphson methode).

(c) Merk op dat:

$$\begin{aligned} p - x_n &= K(p - x_{n-1}) \\ p - x_{n-1} &= K(p - x_{n-2}) \end{aligned}$$

Als we de eerste vergelijking van de tweede aftrekken, dan geldt: $x_n - x_{n-1} = K(x_{n-1} - x_{n-2})$ hieruit volgt: $K = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$.

Voor de tweede uitdrukking gebruiken we

$$p - x_n = K(p - x_{n-1})$$

Breng alle termen met p naar de links en de andere naar rechts dan geldt:

$$(1-K)p = x_n - Kx_{n-1}$$

Delen door $1-K$ geeft:

$$p = \frac{x_n - Kx_{n-1}}{1-K}$$

Trek nu links en rechts x_n af dan geldt:

$$p - x_n = \frac{x_n - Kx_{n-1}}{1-K} - x_n = \frac{x_n - Kx_{n-1} - (1-K)x_n}{1-K} = \frac{K}{1-K}(x_n - x_{n-1}).$$

Hiermee is de tweede gelijkheid aangetoond.

(d) Voor het schatten van de fout, gebruiken we de relaties gegeven in onderdeel (c). Invullen geeft:

$$K = \frac{1.4422631 - 1.4423477}{1.4423477 - 1.4429586} = 0.1385.$$

En dus

$$p - x_n = \frac{0.1385}{1 - 0.1385}(1.4422631 - 1.4423477) = -1.36 \cdot 10^{-5}.$$

De fout is dus ongeveer $-1.36 \cdot 10^{-5}$.

2. (a) De afbreekfout wordt gegeven door

$$\tau = \frac{y_{n+1} - \bar{w}_{n+1}}{h}$$

waarbij $\bar{w}_{n+1}$ gegeven wordt door

$$\bar{w}_{n+1} = y_n + h[\frac{3}{2}f(x_n, y_n) - \frac{1}{2}f(x_{n-1}, y_{n-1})]$$

Wegens de differentiaalvergelijking gaat dit over in:

$$\bar{w}_{n+1} = y_n + h(\frac{3}{2}y'_n - \frac{1}{2}y'_{n-1}) \tag{1}$$

en de laatste term tussen haakjes kan ook weer ontwikkeld worden in een Taylorpolynoom:

$$y'_{n-1} = y'_n - hy''_n + O(h^2) \tag{2}$$

Dit gesubstitueerd in (1) geeft

$$\bar{w}_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{1}{2}h^2y''_n + O(h^3) \tag{3}$$

Beschouw de exacte oplossing op x_{n+1} en ontwikkel in een Taylor polynoom:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{1}{2}h^2y''_n + O(h^3) \tag{4}$$

Invullen in de definitie voor de afbreekfout geeft dat de afbreekfout $O(h^2)$ is.

(b) De methode toegepast op de testvergelijking geeft:

$$u_{n+1} = u_n + h\{\tfrac{3}{2}\lambda u_n - \tfrac{1}{2}\lambda u_{n-1}\} \tag{5}$$

Wegens $u_n = C(h\lambda)u_{n-1}$ en $u_{n+1} = C(h\lambda)u_n = C(h\lambda)^2u_{n-1}$ geldt dus

$$\{C(h\lambda)\}^2 - (1 + \tfrac{3}{2}h\lambda)C(h\lambda) + \tfrac{1}{2}h\lambda\}u_{n-1} = 0 \tag{6}$$

voor elke waarde van n. Hieruit volgt het gestelde. Deze vergelijking heeft twee wortels:

$$\begin{aligned} C_1(h\lambda) &= \frac{1 + \frac{3}{2}h\lambda + \sqrt{1 + h\lambda + (\frac{3}{2}h\lambda)^2}}{2} \\ C_2(h\lambda) &= \frac{1 + \frac{3}{2}h\lambda - \sqrt{1 + h\lambda + (\frac{3}{2}h\lambda)^2}}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

De vorm onder het wortelteken is altijd positief, dus deze uitdrukkingen zijn reëel. Klaarblijkelijk geldt $C_2(h\lambda) < C_1(h\lambda)$ en moeten beide voldoen aan

$-1 < C(h\lambda) < 1$. Er moet dus gelden: $-1 < C_2(h\lambda)$ en $C_1(h\lambda) < 1$. De tweede ongelijkheid geeft:

$$\sqrt{1 + h\lambda + (\tfrac{3}{2}h\lambda)^2} < 1 - \tfrac{3}{2}h\lambda \tag{8}$$
$$1 + h\lambda + (\tfrac{3}{2}h\lambda)^2 < 1 - 3h\lambda + (\tfrac{3}{2}h\lambda)^2 \tag{9}$$
$$0 < -4h\lambda \tag{10}$$

Omdat $\lambda < 0$ is hier altijd aan voldaan. De eerste ongelijkheid geeft:

$$-3 - \tfrac{3}{2}h\lambda < -\sqrt{1 + h\lambda + (\tfrac{3}{2}h\lambda)^2} \tag{11}$$
$$3 + \tfrac{3}{2}h\lambda > \sqrt{1 + h\lambda + (\tfrac{3}{2}h\lambda)^2} \tag{12}$$
$$9 + 9h\lambda + (\tfrac{3}{2}h\lambda)^2 > 1 + h\lambda + (\tfrac{3}{2}h\lambda)^2 \tag{13}$$
$$8 + 8h\lambda > 0 \tag{14}$$
$$h < \frac{1}{\|\lambda\|} \tag{15}$$

(c) Om het beginwaardenprobleem

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = t, \quad y(0) = 0, \frac{dy}{dt}(0) = 1. \tag{16}$$

te schrijven als stelsel gebruiken we de volgende notatie: $v_1 = y$ en $v_2 = y'$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} v_1' &= y' = v_2 \\ v_2' &= y'' = -2y - 3y' + t = -2v_1 - 3v_2 + t \end{aligned}$$

Geschreven als stelsel geeft dit:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Voor het bepalen van de eigenwaarden lossen we λ op uit de volgende vergelijking:

$$det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

met als oplossingen: $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = -2$. Het stelsel is dus stabiel.

(d) De numerieke oplossing op tijdstip t geven we aan met $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ Uit de beginvoorwaarden volgt:

$$\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Na een stap Euler Voorwaarts geldt:

$$\begin{pmatrix} u_1(h) \\ u_2(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} + h[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}]$$

Invullen van de getallen geeft:

$$\begin{pmatrix} u_1(h) \\ u_2(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

De tweede stap met de nieuwe methode geeft:

$$\begin{pmatrix} u_1(2h) \\ u_2(2h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(h) \\ u_2(h) \end{pmatrix} +$$

$$h\left(\frac{3}{2}[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(h) \\ u_2(h) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}] - \frac{1}{2}[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}]\right)$$

Invullen van de getallen geeft:

$$\begin{pmatrix} u_1(2h) \\ u_2(2h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$